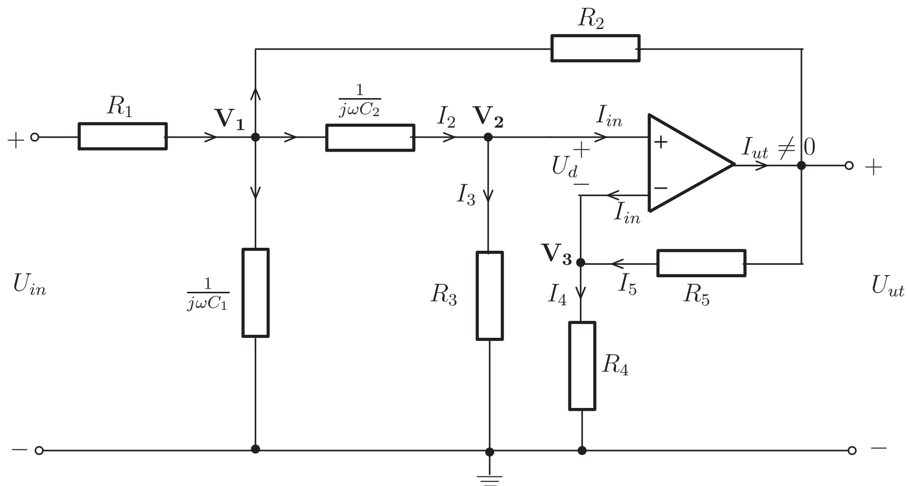
Fullständig lösning till exemplet på föreläsning 8. (Se HO15)



Ideal OP-förstärkare: $\begin{cases} R_i = \infty \Rightarrow I_{in} = 0 \Rightarrow \begin{cases} I_3 = I_2 \\ I_4 = I_5 \end{cases} \\ A = \infty \Rightarrow U_d = 0 \Rightarrow V_2 = V_3 \\ R_o = 0 \Rightarrow I_{ut} \text{ så stor som krävs} \end{cases}$

KCL ger nu:

Nod 1: $\dfrac{U_{in} - V_1}{R_1} - \dfrac{V_1 - U_{ut}}{R_2} - \dfrac{V_1 - V_2}{\frac{1}{j\omega C_2}} - \dfrac{V_1 - 0}{\frac{1}{j\omega C_1}} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{U_{in}}{R_1} = V_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega(C_1 + C_2)\right) - j\omega C_2 V_2 - \frac{U_{ut}}{R_2} \qquad (1)$$

Nod 2: $I_3 = I_2 \Rightarrow \dfrac{V_1 - V_2}{\frac{1}{j\omega C_2}} = \dfrac{V_2}{R_3} \qquad (2)$

Nod 3: $I_5 = I_4 \Rightarrow \dfrac{U_{ut} - V_3}{R_5} = \dfrac{V_3}{R_4} \qquad (3)$

För att bestämma $H(\omega) = \dfrac{U_{ut}}{U_{in}}$ tecknas först V_1 och V_2 uttryckta i U_{ut} med hjälp av ekv. (2) och (3). Dessa uttryck insätts därefter i ekv. (1).

Sambandet (3) och sambandet $V_2 = V_3$ ger: $V_2 = V_3 = \dfrac{U_{ut}}{1 + \frac{R_5}{R_4}} \qquad (4)$

Sambanden (2) och (4) ger: $V_1 = \dfrac{U_{ut}}{1 + \frac{R_5}{R_4}} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{j\omega C_2 R_3}\right) \qquad (5)$

Sambanden (4) och (5) insatta i (1) ger:

$$\frac{U_{in}}{R_1} = \frac{U_{ut}}{1+\frac{R_5}{R_4}}\left(1+\frac{1}{j\omega C_2 R_3}\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+j\omega(C_1+C_2)\right) - j\omega C_2 \cdot \frac{U_{ut}}{1+\frac{R_5}{R_4}} - \frac{U_{ut}}{R_2} \quad (6)$$

Sambandet (6) ger följande frekvensfunktion $H(\omega)$

$$H(\omega) = \frac{U_{ut}}{U_{in}} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{1+\frac{R_5}{R_4}}\left(1+\frac{1}{j\omega C_2 R_3}\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+j\omega(C_1+C_2)\right) - j\omega C_2 \cdot \frac{1}{1+\frac{R_5}{R_4}} - \frac{1}{R_2}} \quad (7)$$

Insättning av $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\ \Omega$ och $C_1 = C_2 = 1$ F i (7) ger:

$$H(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{j\omega})(2+2j\omega) - \frac{j\omega}{2} - 1} = \frac{1}{1+j(\frac{\omega}{2}-\frac{1}{\omega})} \quad (8)$$

(8) är alltså den sökta frekvensfunktionen och motsvarande amplitudkaraktäristik blir:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{2}-\frac{1}{\omega}\right)^2}} \quad (9)$$

(9) visar att detta svarar mot ett bandpassfilter eftersom
$\omega = 0 \Rightarrow |H(\omega)| = 0$ och $\omega \to \infty \Rightarrow |H(\omega)| \to 0$ och $|H(\omega)|_{max} = 1$ när $\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega} = 0$.
Det senare sambandet ger mittvinkelfrekvensen (resonansvinkelfrekvensen) $\omega_0 = \sqrt{2} \approx 1.414$ rad/s

Bestämning av gränsvinkelfrekvenser:

Sambandet $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|H(\omega)|_{max}$ ger gränsvinkelfrekvenserna ω_1 och ω_2.

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{2}-\frac{1}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

(10) ger:

$$\begin{cases} \frac{\omega_2}{2} - \frac{1}{\omega_2} = 1 \Rightarrow \omega_2^2 - 2\omega_2 - 2 = 0 \Rightarrow \omega_2 = 1 \pm \sqrt{3} \approx \begin{cases} 2.732 \text{ rad/s} \\ (-0.732) \end{cases} \\ \frac{\omega_1}{2} - \frac{1}{\omega_1} = -1 \Rightarrow \omega_1^2 + 2\omega_1 - 2 = 0 \Rightarrow \omega_1 = -1 \pm \sqrt{3} \approx \begin{cases} 0.732 \text{ rad/s} \\ (-2.732) \end{cases} \end{cases}$$

Observera att $\omega_2 > \omega_1 > 0$.
Gräns*frekvenserna* blir således: $f_1 \approx \frac{0.732}{2\pi} \approx 0.117$ Hz och $f_2 \approx \frac{2.732}{2\pi} \approx 0.435$ Hz.

$$\text{Svar:} \begin{cases} \text{Frekvensfunktionen } H(\omega) = \frac{1}{1+j(\frac{\omega}{2}-\frac{1}{\omega})} \\ \text{Bandpassförstärkningen } |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{2}-\frac{1}{\omega}\right)^2}};\ 0.732 < \omega < 2.732 \\ \text{Gränsfrekvenser:} f_1 \approx 0.117 \text{ Hz och } f_2 \approx 0.435 \text{ Hz} \end{cases}$$

Nytt problem: Låt fortfarande $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\ \Omega$. Beräkna C_1 och C_2 så att filtret får gränsfrekvenserna $f_1 = 1$ Hz och $f_2 = 5$ Hz.

Lösning: Utgå från uttrycket (7) på $H(\omega)$ och sätt in givna resistansvärden, vilket ger: $H(\omega) = \dfrac{1}{\frac{C_1+C_2}{2C_2} + j(\frac{\omega C_1}{2} - \frac{1}{\omega C_2})}$ och

$|H(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{(\frac{C_1+C_2}{2C_2})^2 + (\frac{\omega C_1}{2} - \frac{1}{\omega C_2})^2}}$

$|H(\omega)|\text{max} = \dfrac{2C_2}{C_1 + C_2}$ när $\frac{\omega C_1}{2} = \frac{1}{\omega C_2}$.

Vid gränsvinkelfrekvenserna ω_1 och ω_2 gäller som vanligt:

$|H(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot |H(\omega)|\text{max} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{(\frac{C_1+C_2}{2C_2})^2 + (\frac{\omega C_1}{2} - \frac{1}{\omega C_2})^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{2C_2}{C_1 + C_2}$

(11)

För att lättare kunna manipulera uttrycket (11) inför vi $g_1 = \frac{C_1+C_2}{2C_2}$ och $g_2 = \frac{\omega C_1}{2} - \frac{1}{\omega C_2}$ varvid faktorn $\frac{2C_2}{C_1+C_2}$ i höger led blir lika med $\frac{1}{g_m}$. Detta ger:

$\frac{1}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{g_1} \Rightarrow \frac{1}{g_1\sqrt{1+(\frac{g_2}{g_1})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{g_1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{g_2}{g_1})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\frac{g_2}{g_1})^2 = 1 \Rightarrow$
$g_2^2 = g_1^2$ dvs. $(\frac{\omega C_1}{2} - \frac{1}{\omega C_2})^2 = (\frac{C_1+C_2}{2C_2})^2$

Genom att multiplicera båda sidor med $(2C_2)^2$ erhålls

$(\omega C_1 C_2 - \frac{2}{\omega})^2 = (C_1 + C_2)^2 \qquad (12)$

(12) ger två olika relationer där den ena gäller vid ω_2 och den andra vid ω_1:

$$\begin{cases} \omega_2 C_1 C_2 - \frac{2}{\omega_2} = C_1 + C_2 \ (13) \\ \\ \omega_1 C_1 C_2 - \frac{2}{\omega_1} = -(C_1 + C_2) \ (14) \end{cases}$$

Att just (13) gäller vid ω_2 och (14) vid ω_1 beror på att $\omega_2 > \omega_1$ varvid differensen $\omega_2 C_1 C_2 - \frac{2}{\omega_2}$ är större än differensen $\omega_1 C_1 C_2 - \frac{2}{\omega_1}$ och höger led är uppenbart större i (13) än i (14) eftersom såväl C_1 som C_2 är positiva.
(13) och (14) bildar ett icke-linjärt ekvationssystem med C_1 och C_2 som obekanta, vilket löses på följande sätt: (Icke-linjärt eftersom produkten av C_1 och C_2 ingår)
Börja med att addera (13) och (14) vilket ger:

$C_1 C_2(\omega_1+\omega_2) - 2(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}) = 0 \Rightarrow C_1 C_2 = \frac{2}{(\omega_1+\omega_2)}(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}) = \frac{2}{(\omega_1+\omega_2)}(\frac{\omega_2+\omega_1}{\omega_1\omega_2}) \Rightarrow$
$C_1 C_2 = \frac{2}{\omega_1\omega_2}$ vilket insatt i (13) ger $C_1 + C_2 = \frac{2}{\omega_1} - \frac{2}{\omega_2}$

Eftersom $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi$ och $\omega_2 = 2\pi f_2 = 10\pi$ erhålls:

$C_1 C_2 = \frac{1}{10\pi^2}$ (15) och $C_1 + C_2 = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{5\pi} = \frac{4}{5\pi}$ (16)

(16) ger $C_2 = \frac{4}{5\pi} - C_1$ vilket insatt i (15) ger:

$$(\tfrac{4}{5\pi} - C_1)C_1 = \tfrac{1}{10\pi^2} \Rightarrow C_1^2 - \tfrac{4}{5\pi}C_1 + \tfrac{1}{10\pi^2} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_1 = \tfrac{4}{10\pi} \pm \sqrt{\tfrac{16}{(10\pi)^2} - \tfrac{10}{(10\pi)^2}} = \tfrac{4}{10\pi} \pm \tfrac{\sqrt{6}}{10\pi} \approx \begin{cases} 205 \text{ mF} \\ 49.4 \text{ mF} \end{cases}$$

Eftersom $C_2 = \frac{4}{5\pi} - C_1$ erhålls

$$\Rightarrow C_2 = \tfrac{4}{10\pi} \mp \sqrt{\tfrac{16}{(10\pi)^2} - \tfrac{10}{(10\pi)^2}} = \tfrac{4}{10\pi} \mp \tfrac{\sqrt{6}}{10\pi} \approx \begin{cases} 49.4 \text{ mF} \\ 205 \text{ mF} \end{cases}$$

Det finns således två lösningar till detta problem. Vi erhåller nämligen önskade gränsfrekvenser dels genom att välja $C_1 \approx 205$ mF och $C_2 \approx 49.4$ mF och dels genom att välja $C_1 \approx 49.4$ mF och $C_2 \approx 205$ mF.

De båda lösningarna är emellertid *inte* ekvivalenta, t.ex. erhålls olika värden på $|H(\omega)|_{\max}$. $|H(\omega)|_{\max} = \dfrac{2C_2}{C_1 + C_2}$, vilket i fall 1 ($C_1 \approx 205$ mF, $C_2 \approx 49.4$ mF) ger $|H(\omega)|_{\max} \approx 0.389$, medan fall 2 ger $|H(\omega)|_{\max} \approx 1.61$. Eftersom fall 1 ger en avsevärd försvagning av signalen i passbandet, medan fall 2 ger en viss förstärkning, kan det vara lämpligt att välja fall 2.

Svar: $C_1 \approx 49.4$ mF och $C_2 \approx 205$ mF ger önskade gränsfrekvenser. Med komponentvärden ur E-12 serien erhålls $C_1 = 47$ mF och $C_2 = 220$ mF.

E12-serien finner man t.ex. på sid 199 i läroboken, där givna serier gäller för kondensatorer såväl som för resistorer.