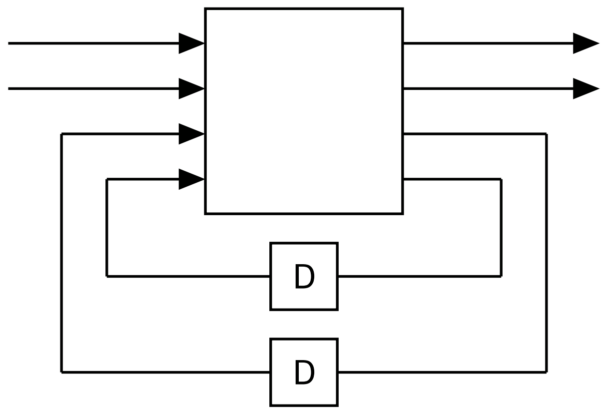
TSEA22 Digitalteknik 2021

Oscar Gustafsson

Ingemar Ragnemalm



Föreläsning 2. Boolesk algebra.

Denna föreläsning:

- Boolesk algebra
- Kretssyntes baserad på Boolesk algebra

Förra föreläsningen:

- Talsystem, binära tal, hexadecimala tal.
- Grindar.
- Lite praktik, grind från transistor, hopkopplade utgångar...

Binära tal

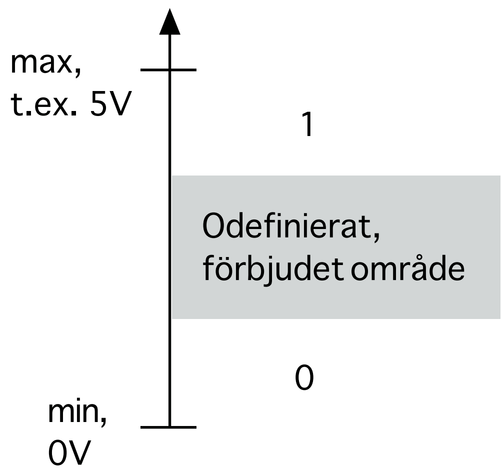
$$42 = 32 + 8 + 2 = 101010$$

Hexadecimala tal:

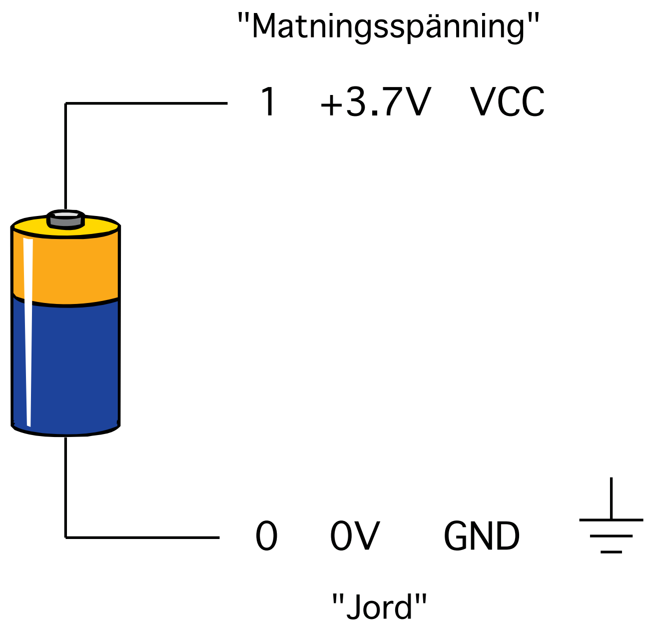
$$42 = \$2A = 2*16 + 10$$

Var kommer ettorna och nollorna från?

Spänningsnivåer!

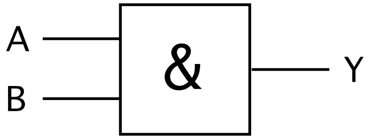


Två spänningsnivåer, max och min

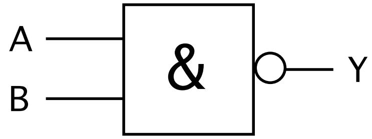


Grindar

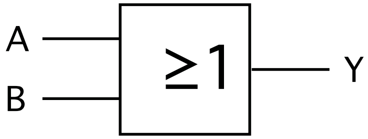
AND



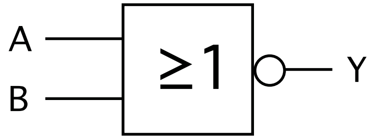
NAND



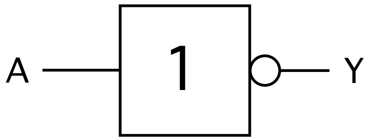
OR



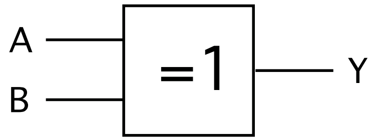
NOR



NOT

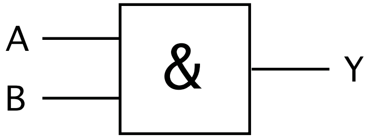


XOR



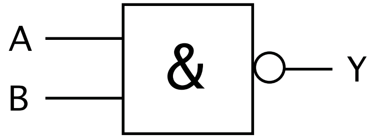
...med Booleska uttryck:

AND



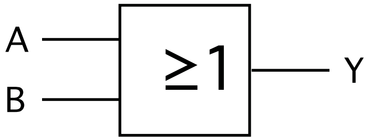
$A \cdot B$ AB

NAND



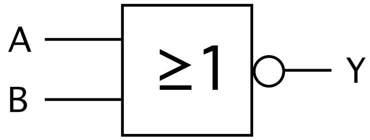
$(A \cdot B)'$ $(AB)'$

OR



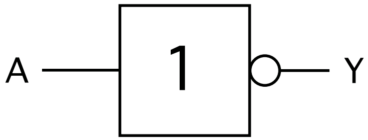
$A + B$

NOR



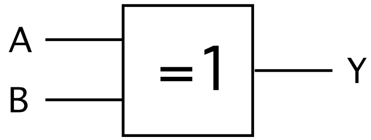
$(A + B)'$

NOT



A'

XOR



$A \oplus B$

Jag påstod att alla grindar kan skapas med NAND. Låt oss se hur det går till.

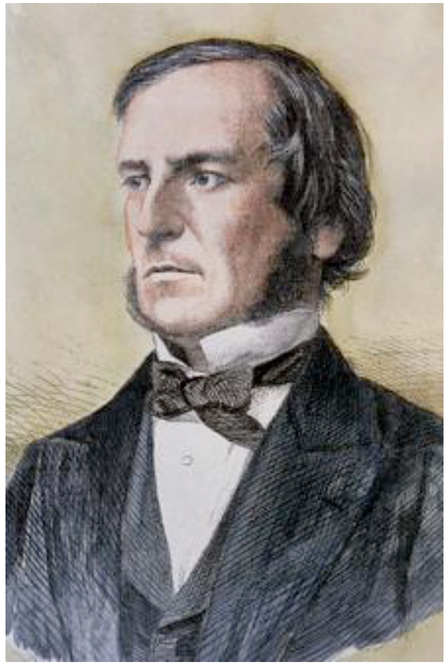
Många andra funktioner skapas med kombinationer av grindar.

Boolesk algebra

Grindar utför *logiska operationer*.

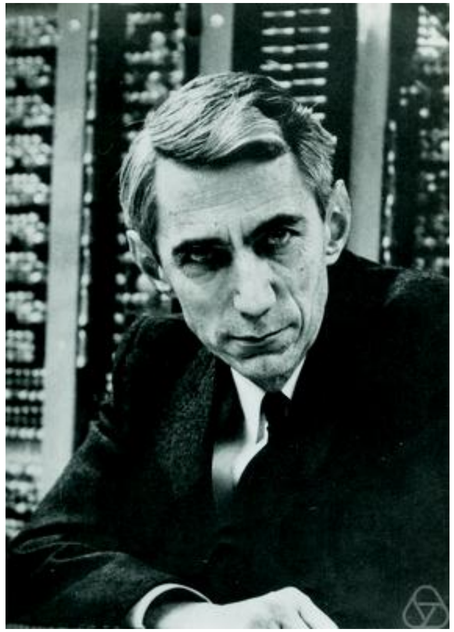
Boolesk algebra beskriver dessa logiska operationer.

En algebra för tvåvärda variabler, sant/falskt.



George Boole (1815-1864)

Skapade den Booleska algebran.
"Mathematical analysis of logic".



Claude Shannon (1916-2001)

Tillämpning. "Switching algebra",
informationsteori, samplingsteoremet.

Konstanter

0	(Falskt)
1	(Sant)

Operationer

+	(Eller)
·	(Och)
'	(Icke)

Axiom

$$0 + 0 = 0$$
$$1 \cdot 1 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$
$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1$$
$$1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$$

$$0' = 1$$
$$1' = 0$$

Om dessa inte är självklara så har vi problem!

Alternativa beteckningar på operationer (från Fö 1)

Och

$Y = A \cdot B = AB$

även:

Y = A and B

$Y = A \wedge B$

Y = A&B

Y = A*B

Eller

$Y = A + B$

även:

Y = A or B

$Y = A \vee B$

Y = A | B

Y = A # B

Icke

$Y = A'$

även:

Y = not A

Y = ~A

Y = !A

Y = /A

$Y = \neg A$

$Y = \bar{A}$

Kuriosa: ∨ och ∧

∨ kommer från "vel" = eller.
∧ är bara ∨ upp-och-ner.

Ett ord för "och" är "at", så varför skriver vi inte @?

Räknelagar för en variabel

$$x + x = x$$
$$x \cdot x = x$$

$$x + x' = 1$$
$$x \cdot x' = 0$$

$$x + 1 = 1$$
$$x \cdot 0 = 0$$

$$x + 0 = x$$
$$x \cdot 1 = x$$

$$(x')' = x$$

Räknelagar för flera variabler

$x + (y + z) = (x + y) + z$
$x(yz) = (xy)z$

Associativa lagarna

$x + y = y + x$
$xy = yx$

Kommutativa lagarna

$x(y+z) = xy + xz$
$x + yz = (x + y)(x + z)$

Distributiva lagarna

Absorption

$$x + xy = x$$

$$x(x + y) = x$$

En term täcker en annan

Consensus

$$xy + x'z = xy + x'z + yz$$

$$(x + y)(x' + z) = (x + y)(x' + z)(y + z)$$

Två uttryck täcker
tillsammans ett tredje

De Morgans lagar

$$(x + y)' = x'y'$$
$$(xy)' = x' + y'$$

Man kan "flytta in" inverteringen
om man *vänder* på operationen!

Bokens numrering av lagarna (används i en del lösningar):

L1: $x + x = x$

L2: $x \cdot x = x$

L3: $x + x' = 1$

L4: $x \cdot x' = 0$

L5: $x + 1 = 1$

L6: $x \cdot 0 = 0$

L7: $x + 0 = x$

L8: $x \cdot 1 = x$

L9: $(x')' = x$

L10: $x + (y + z) = (x + y) + z$

L11: $x(yz) = (xy)z$

L12: $x + y = y + x$

L13: $xy = yx$

L14: $x(y+z) = xy + xz$

L15: $x + yz = (x + y)(x + z)$

Och de tre knepigare igen:

Absorption:

L16: $x + xy = x$

L17: $x(x + y) = x$

Concensus:

L18: $xy + x'z = xy + x'z + yz$

L19: $(x + y)(x' + z) = (x + y)(x' + z)(y + z)$

De Morgan:

L20: $(x + y)' = x'y'$

L21: $(xy)' = x' + y'$

(men jag säger hellre namnen än ett nummer.)

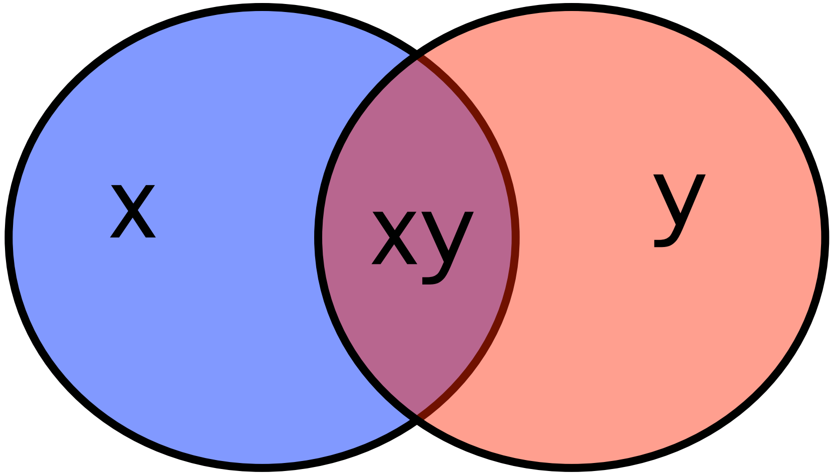
Verktyg för att bevisa lagarna

- Algebraiska uttryck
- Venn-diagram
- Sanningstabell

Algebraiska uttryck

Kombinera lagarna för att hitta bevis. Expansion och reduktion av utryck, ofta med absorption och concensus.

Venn-diagram



x+y

Sanningstabell

"Brute force"-lösning. Fungerar för måttligt antal variabler. "Testa alla fall."

Operationen XOR

$a \oplus b$

Räknelagar:

$0 \oplus 0 = 0$

$0 \oplus 1 = 1$

$1 \oplus 0 = 1$

$1 \oplus 1 = 0$

Sanningstabell

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Räknelagar för en variabel:

$x \oplus 0 = x$

$x \oplus x = 0$

Räknelagar för flera variabler:

$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$	associativa lagen
$x \oplus y = y \oplus x$	kommutativa lagen
$x (y \oplus z) = (xy \oplus xz)$	distributiva lagen
$x \oplus y = x \oplus z \Leftrightarrow y = z$	motsv $a+1=b+1 \Leftrightarrow a = b$

Omvandling till och från övriga operationer:

$x \oplus y = x'y + xy'$

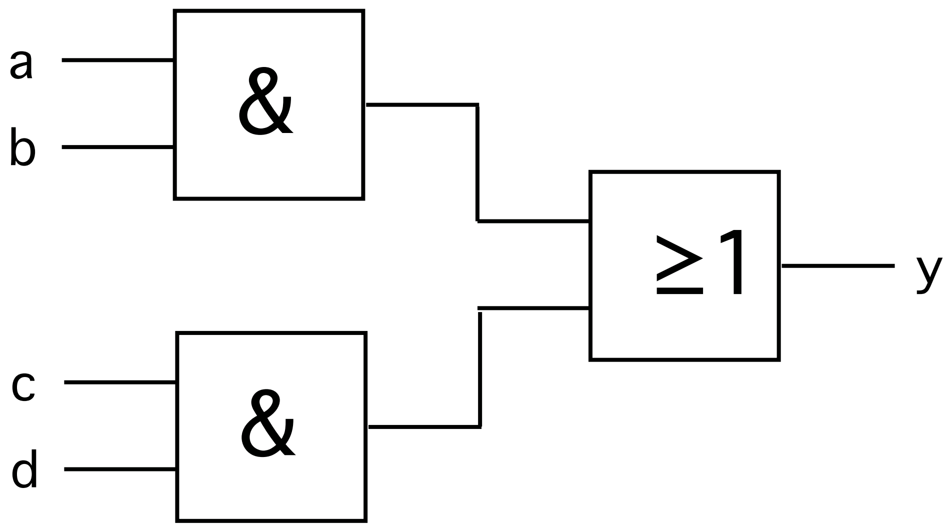
$(x \oplus y)' = xy + x'y'$ — 1-bits komparator

$x + y = x \oplus y \oplus xy$

$x \oplus 1 = x'$ — Villkorlig inverterare

Från uttryck till grindar

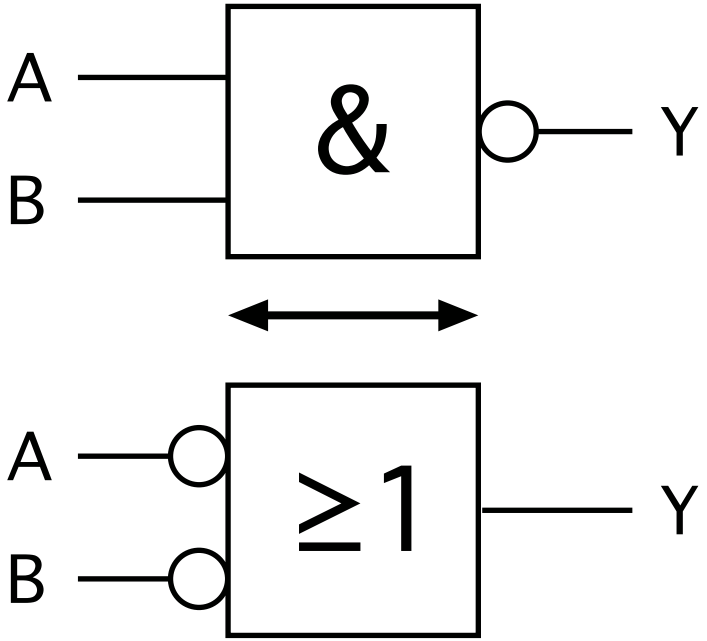
$y = ab + cd$



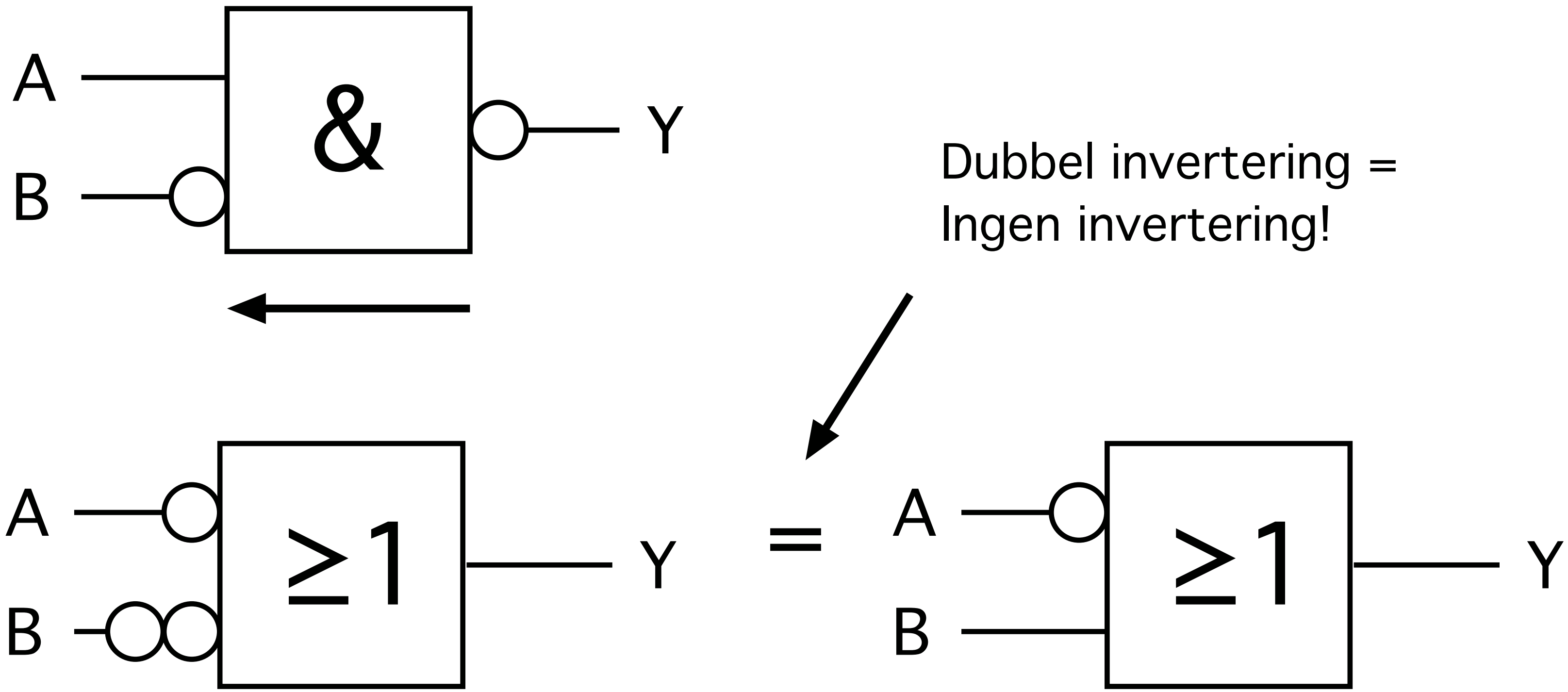
De Morgan = "tryck ringarna rakt genom grinden"

$y = (ab)'$

$y = a' + b'$



För många inverterare?
Inga problem!



NÄSTA FÖRELÄSNING

Karnaughdiagram