Räkneregler för en variabel

Ex Bevisa

$$(x')' = x \quad (L9)$$

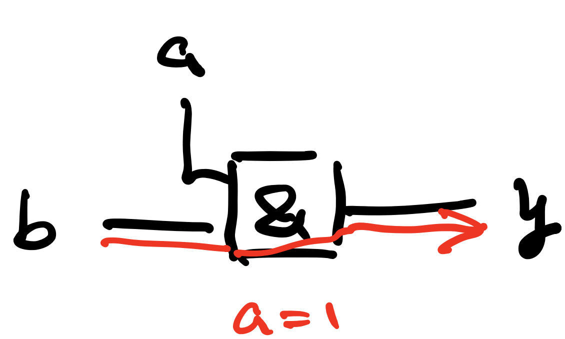
Bevis: Antag att

$x=0$: $VL = (0')' \overset{A7}{=} (1)' \overset{A8}{=} 0 = HL$

$x=1$: $VL = (1')' \overset{A8}{=} (0)' \overset{A7}{=} 1 = HL$

$\square$.

Ex Illostration av räkneregel och motiv till varför AND-komponeten kallas grind.



Betrakta a som styrsignal.

Fall 0 : $a=0 \Rightarrow y = a \cdot b = 0 \cdot b \overset{L6}{=} 0$

$\Rightarrow$ Grinden är stängd

Fall 1 : $a=1 \Rightarrow y = a \cdot b = 1 \cdot b \overset{L8}{=} b$

$\Rightarrow$ Grinden är öppen.

Räkneregler för flera variabler

En lag/sats kan visas på följande vis:

- Använda satser och axiom (algebra)
- Perfekt induktion, dvs sätta upp en sanningstabell

Ex Absorbtion

Visa $x + xy = x$ (L16)

Bevis. Algebra ger

$$VL = x + xy \overset{L8}{=} x \cdot 1 + xy \overset{L14}{=} x(1+y) =$$
$$\overset{L12}{=} x \cdot (y+1) \overset{L5}{=} x \cdot 1 \overset{L8}{=} x = HL \; \square$$

Ex Visa absorbtionslagen med perfekt induktion.

x	y	VL = x	$+$	xy	HL x
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

lika! $\Leftrightarrow$ HL=VL $\square$.

Ex Visa consensuslagen

$$xy + x'z = xy + x'z + yz \quad \text{(L18)}$$

xyz	xy	$x'z$	yz	VL $= xy + x'z$	HL $= xy + x'z + yz$
000	0	0	0	0	0
001	0	1	0	1	1
010	0	0	0	0	0
011	0	1	1	1	1
100	0	0	0	0	0
101	0	0	0	0	0
110	1	0	0	1	1
111	1	0	1	1	1

lika $\Leftrightarrow$ VL = HL $\square$.

Ex Förenkla $a'b' + ab + a'b =$

$= /\text{bryt ut}/ = a'(\underbrace{b' + b}_{=1}) + ab =$

$= a' \cdot 1 + ab = /\text{consensus}/ =$

$= a' + \cancel{ab} + \underbrace{1 \cdot b}_{=b} = /\text{absorbtion}/ =$

$= a' + b$

De Morgans lag (viktig vid förenkling)

Visa $(x+y)' = x'y'$ (L20)

x	y	$x+y$	$(x+y)'$	x'	$x'\cdot y'$	y'
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0

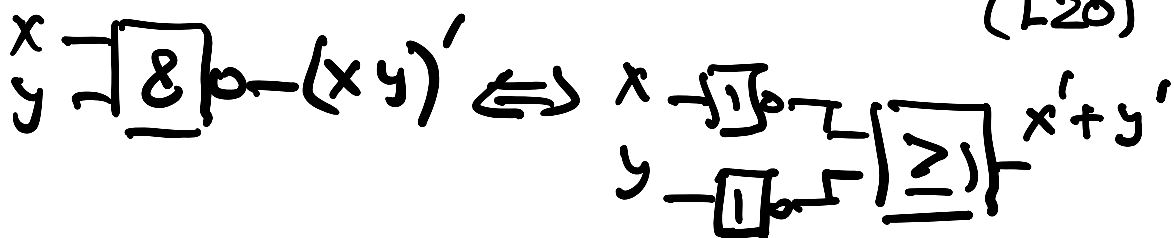
lika $\Leftrightarrow$ VL=HL $\square$.

$$(x\cdot y)' = x' + y' \qquad \text{(L21)}$$

Invertering får flyttas in på variablerna om '+' byts mot '·' eller '·' mot '+'.

Grafisk tolkning

(L20)



(L21)

Generalisering av deMorgans lag

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)' = x_1' \cdot x_2' \cdot \ldots \cdot x_n'$$

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_n)' = x_1' + x_2' + \ldots + x_n'$$

XOR

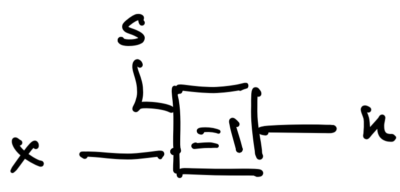
Används ibland för att minska komponetbehovet

Axiom

$x\ y$	$x \oplus y$	$x' \cdot y$	$x \cdot y'$	$(x \oplus y)'$	$x'y'$	xy
0 0	0	0	0	1	1	0
0 1	1	1	0	0	0	0
1 0	1	0	1	0	0	0
1 1	0	0	0	1	0	1

Räkneregler

Ex XOR-grinden som styrbar inverterare



Betrakta s som styrsignal

$s=0 \Rightarrow u = s \oplus x = 0 \oplus x \overset{E4}{=} x$

$\Rightarrow$ släpper igenom x

$s=1 \Rightarrow u = s \oplus x = 1 \oplus x = x'$

$\Rightarrow$ inverterar x

Koppling mellan XOR och Boolesk alg.

$$x \oplus y = x'y + xy' \qquad (E10)$$

$$(x \oplus y)' = x'y' + xy \qquad (E11)$$

Ex Visa (E11)

deMorgans

$$(x \oplus y)' \overset{E10}{=} (x'y + xy')' \overset{\downarrow}{=}$$

$$= (x \cdot y')' \cdot (x' \cdot y)' = /\text{deMorgans } \times 2/ =$$

$$= (x + y') \cdot (x' + y) =$$

$$= \underbrace{\cancel{x \cdot x'}}_{=0} + xy + x'y' + \underbrace{\cancel{y \cdot y'}}_{=0} =$$

$$= xy + x'y' \qquad \square.$$

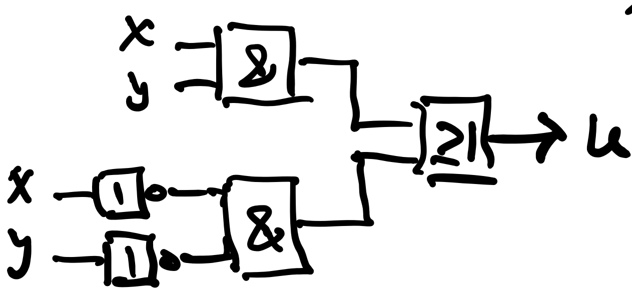
Ex Förenkla och realisera

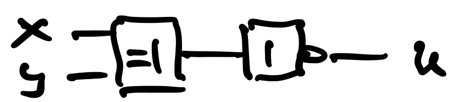
$$u = xy + \underline{(x+y)'} + x'y'z = /\text{deMorgan}/ =$$

$$= xy + \underline{x'y'} + \cancel{x'y'}z = /\text{absorbtion}/ =$$

$$= \underline{xy + x'y'} = (x \oplus y)'$$

Realisering





I detta fallet ger XOR-grinden en komponentsnål realisering.