Fö 2 Boolesk algebra

OH 1-4

Räkneregler för en variabel (OH 5)

Ex Bevisa

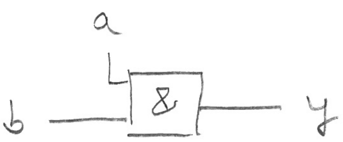
$$(x')' = x \qquad (L9)$$

Bevis: Antag att

$x=0$: VL $= (0')' \overset{A7}{=} 1' \overset{A8}{=} 0 =$ HL

$x=1$: VL $= (1')' \overset{A8}{=} 0' \overset{A7}{=} 1 =$ HL $\square$.

Ex Illustration av räkneregel och motiv till varför AND-komponenten kallas grind.



Betrakta a som styrsignal.

Fall 0: $a=0 \Rightarrow y = a \cdot b = 0 \cdot b \overset{L6}{=} 0$

$\Rightarrow$ Grinden är stängd

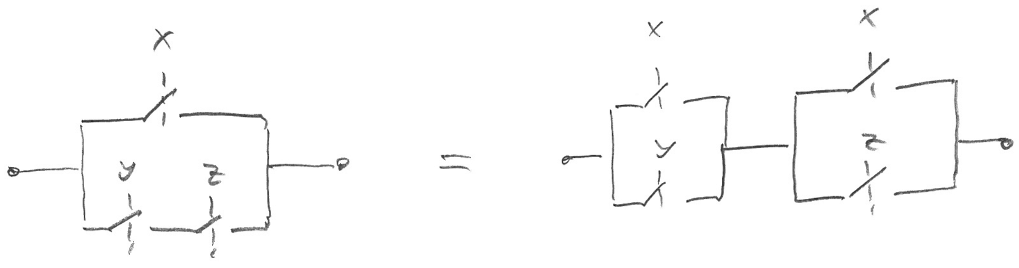
Fall 1: $a=1 \Rightarrow y = a \cdot b = 1 \cdot b \overset{L8}{=} b$

$\Rightarrow$ Grinden är öppen

Räknelagar för flera variabler (OH 6)

Ex: Illustration av (L15)

$$x + yz = (x+y)(x+z)$$



En lag/sats kan visas på följande sätt

- Använda satser och axiom (algebra)
- Venn-diagram
- Perfekt induktion, dvs ställa upp sanningstabell

Ex Absorbtion

Visa $x + xy = x$ (L16)

Bevis. Algebra ger

$$VL = x + xy \overset{L8}{=} x \cdot 1 + x \cdot y \overset{L14}{=} x(1+y) =$$

$$\overset{L12,\,L5}{=} x \cdot 1 \overset{L8}{=} x = HL \qquad \square.$$

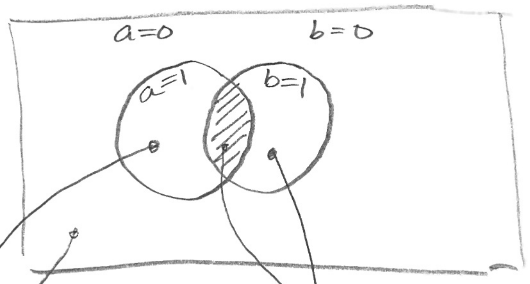
Venn-diagram

Ex $f = a \cdot b$

- En ring för varje variabel
- En yta för varje variabelvärde

2^2 ytor $= 2^2$ värden på (a,b)

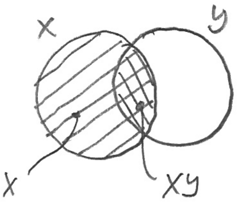
- Skuggad yta = de värden (a,b) som ger $f=1$



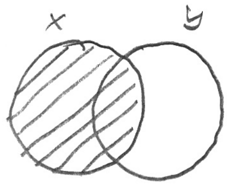
a	b	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ex Venn-diagram som bevisar absorbtionslagen.

$VL = x + xy$



$HL = x$

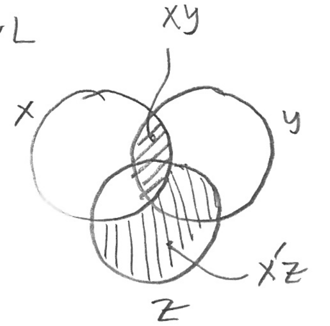


Samma yta skuggad $\Leftrightarrow$ $VL = HL$ $\square$.

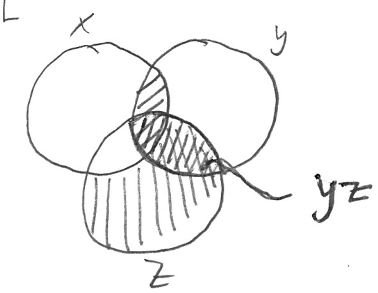
Ex Visa consensuslagen

$$xy + x'z = xy + x'z + yz \qquad (L18)$$

VL



HL



$VL = HL$. $\square$

Ex Förenkla $a'b' + ab + a'b = $ /bryt ut/ $=$

$$= a'\underbrace{(b'+b)}_{=1} + ab =$$

$$= a' \cdot 1 + ab = \text{/consensus/} =$$

$$= a' + \cancel{ab} + 1 \cdot b = \text{/absorbtion/} =$$

$$= a' + b$$

De Morgans lag (viktig vid förenkling)

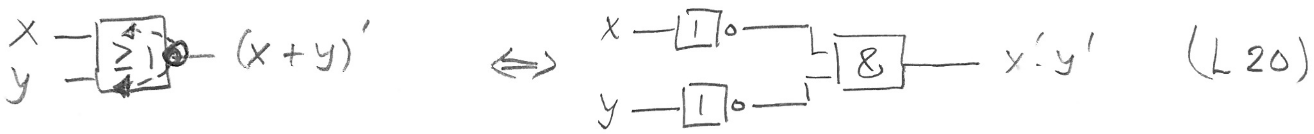
Visa $(x+y)' = x' \cdot y'$ (L20)

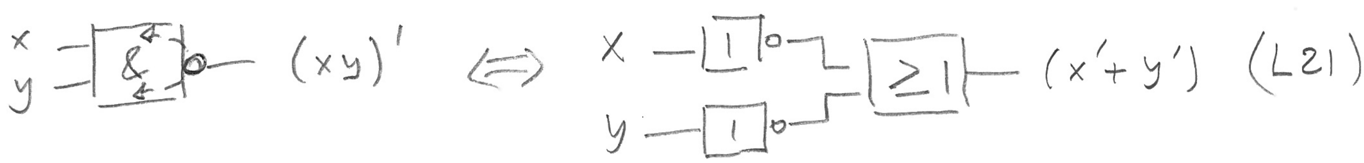
x	y	$x+y$	$VL = (x+y)'$	x'	y'	$HL = x' \cdot y'$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

lika! $\Longleftrightarrow$ $VL = HL$ $\square$.

Inverteringen får flyttas in på variablerna om '+' byts mot '·' eller '·' byts mot '+'.

Grafisk tolkning





Generalisering av de Morgans lagar

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)' = x_1' \cdot x_2' \cdot \ldots \cdot x_n'$$

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)' = x_1' + x_2' + \cdots + x_n'$$

XOR

Används ibland för att minska komponentbehovet

Axiom

x	y	$x \oplus y$	
0	0	0	(E1)
0	1	1	(E2)
1	0	1	(E2)
1	1	0	(E3)

Räkneregler OH 7

Ex XOR-grinden som styrbar inverterare

Betrakta s som styrsignal

$$s = 0 \Rightarrow \quad u = s \oplus x = 0 \oplus x \overset{E4}{=} x$$

$\Rightarrow$ släpper igenom x

$$s = 1 \Rightarrow \quad u = s \oplus x = 1 \oplus x \overset{E13}{=} x'$$

$\Rightarrow$ inverterar x

Koppling mellan XOR och Boolesk algebra

$$x \oplus y = x'y + xy' \qquad (E10)$$

$$(x \oplus y)' = x'y' + xy \qquad (E11)$$

<u>Ex</u> Visa (E11).

$$(x\oplus y)' = (x'y + xy')' \overset{\text{de Morgan}}{=} (x'y)' \cdot (xy')' \overset{\text{deMorgan}}{=}$$

$$= (x + y')(x' + y) =$$

$$= \underbrace{xx'}_{=0} + xy + x'y' + \underbrace{yy'}_{=0} = xy + x'y'$$

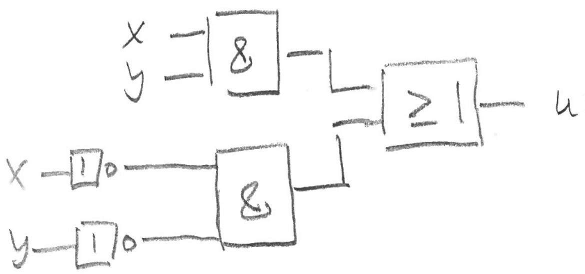
<u>Ex</u> Förenkla och realisera

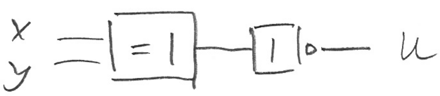
$$u = xy + (x+y)' + x'y'z \overset{\text{de Morgan}}{=}$$

$$= xy + \underline{x'y'} + \underline{x'\cancel{y'}}z \overset{\text{absorbtion}}{=}$$

$$= xy + x'y' \overset{E11}{=} (x \oplus y)'$$

<u>Realiseringar</u>

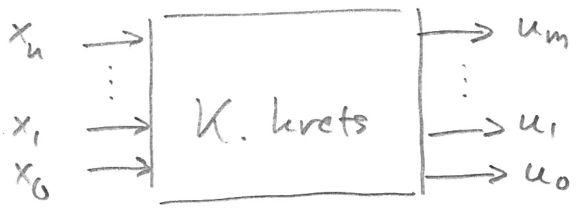




I detta fall ger XOR-grinden en komponentsnål realisering.

Kombinationskretsar

Def Kombinationskrets



$u = f(x)$ där

$u = (u_m, \dots, u_1, u_0)$

$x = (x_n, \dots, x_1, x_0)$

$u_i, x_j \in \{0, 1\}$

Obs: Utsignal u beror endast på x vid samma tidpunkt.

Syntes av k-kretsar

Ex OR-funktionen

Funktionstabell

a	b	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Booleska uttryck

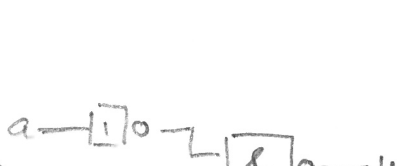
$y = f(a,b) =$

$= a + b =$

$= (a+b)'' =$

$= (a' \cdot b')'$

Realisering med grindar



Notera

- Flera uttryck för samma funktion.
- Uttrycken gå att översätta till grindnät och vise versa.

Syntesfrågeställningar (ev OH)

- Hur ställer vi upp Booleska uttryck för en funktion specificerad av en tabell?

- Hur hittar vi ett uttryck som svarar mot ett billigt grindnät?

  - Billigt: få ingångar, få grindar, liten kiselarea
  - Bivillkor:

    - vissa typer av grindar
    - få plats i en given programmerbar krets (PLD)
    - maximal fördröjning från in- till ut-signal ⇒ begränsat grinddjup

Löpande exempel

Låt $x_2 x_1 x_0$ representera tal där x_2 är msb.

Realisera funktionen som returnerar 1 för de 3 minsta talen.

Funktionstabell

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Grundformer för Booleska funktioner

Def Summa av produkter (SP-form, disjunktiv form)

$$f = x_2' x_1' + x_2' x_0'$$

Def Produkt av summor (PS-form, konjunktiv form)

$$f = x_2' (x_1' + x_0')$$