

Boolesk algebra

Digitalteknik – Föreläsning 2

Mattias Krysaner

Institutionen för systemteknik

lakttagelser från föreläsning 1

a)



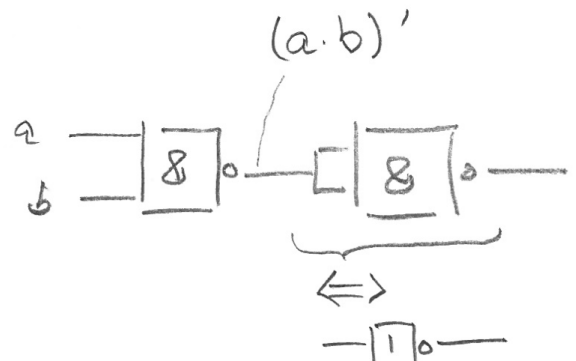
a	a · a	y = (a · a)'
0	0	1
1	1	0

$$a \cdot a = a$$

$$y = a'$$

Kretsens funktion är ekvivalent med en inverterare.

b)



$y = ((a \cdot b)')' = a \cdot b$

dubbel invertering tar ut varandra, Bodesk algebra

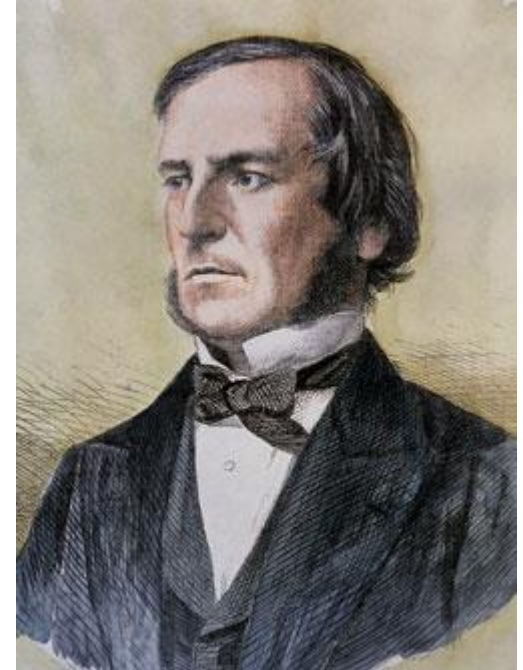
$$((a)')' = a$$

Boolesk algebra

Matematisk grund för

- Logik
- Används för analys och syntes av digitala kretsar

George Boole var en engelsk matematiker som skapade grunderna till Boolesk algebra



George Boole 1815-1864

Axiom

- Variabelvärden: 0 (falskt), 1 (sann)
- Operationer: eller, och, icke

OR (ELLER)

$$0 + 0 = 0 \quad (\text{A1})$$

$$0 + 1 = 1 \quad (\text{A5})$$

$$1 + 0 = 1 \quad (\text{A5})$$

$$1 + 1 = 1 \quad (\text{A3})$$

AND (OCH)

$$0 \cdot 0 = 0 \quad (\text{A4})$$

$$0 \cdot 1 = 0 \quad (\text{A6})$$

$$1 \cdot 0 = 0 \quad (\text{A6})$$

$$1 \cdot 1 = 1 \quad (\text{A2})$$

NOT (ICKE)

$$0' = 1 \quad (\text{A7})$$

$$1' = 0 \quad (\text{A8})$$

OBS: axiomen definierar sanningstabellerna för motsvarande grindar.

Betrakta t ex OR-grinden:

a	b	y	Axiom
0	0	0	(A1)
0	1	1	(A5)
1	0	1	(A5)
1	1	1	(A3)

Räknelagar för en variabel

- Räknelagar kan härledas från axiomen. Dom ska man kunna använda utan att slå upp.
- Anta att x är en variabel som kan anta värdet 0 eller 1. Då gäller:

OR (ELLER)

$$x + x = x \quad (\text{L1})$$

$$x + x' = 1 \quad (\text{L3})$$

$$x + 1 = 1 \quad (\text{L5})$$

$$x + 0 = x \quad (\text{L7})$$

AND (OCH)

$$x \cdot x = x \quad (\text{L2})$$

$$x \cdot x' = 0 \quad (\text{L4})$$

$$x \cdot 1 = x \quad (\text{L8})$$

$$x \cdot 0 = 0 \quad (\text{L6})$$

NOT (ICKE)

$$(x')' = x \quad (\text{L9})$$

- *Gå igenom lagarna och förvissa er om att ni förstår dem.*

Räknelagar för flera variabler

Associativa lagar

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad (\text{L10})$$

$$x(yz) = (xy)z \quad (\text{L11})$$

Kommutativa lagar

$$x + y = y + x \quad (\text{L12})$$

$$xy = yx \quad (\text{L13})$$

Distributiva lagar

$$x(y + z) = xy + xz \quad (\text{L14})$$

$$x + yz = (x + y)(x + z) \quad (\text{L15})$$

Absorptionslagar

$$x + xy = x \quad (\text{L16})$$

$$x(x + y) = x \quad (\text{L17})$$

Consensuslagar

$$xy + x'z = xy + x'z + yz \quad (\text{L18})$$

$$(x + y)(x' + z) = (x + y)(x' + z)(y + z) \quad (\text{L19})$$

De Morgans lagar

$$(x + y)' = x'y' \quad (\text{L20})$$

$$(xy)' = x' + y' \quad (\text{L21})$$

- (L10)-(L14) gäller på samma sätt som för reella tal.
- (L15) anger att även addition är distributivt i Boolesk algebra.
- (L16)-(L21) saknar motsvarighet för reella tal och är värda mer uppmärksamhet.

Axiom och räknelagar för XOR

Axiom	Räknelagar för en variabel	Räknelagar för flera variabler
$0 \oplus 0 = 0$ (E1)	$x \oplus 0 = x$ (E4)	$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (E6)
$0 \oplus 1 = 1$ (E2)	$x \oplus x = 0$ (E5)	$x \oplus y = y \oplus x$ (E7)
$1 \oplus 0 = 1$ (E2)		$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$ (E8)
$1 \oplus 1 = 0$ (E3)		$x \oplus y = x \oplus z \Leftrightarrow y = z$ (E9)

Koppling mellan XOR och operationer i Boolesk algebra

XOR uttryckt i Boolesk algebra

$$x \oplus y = x'y + xy' \quad (\text{E10})$$

$$(x \oplus y)' = xy + x'y' \quad (\text{E11})$$

OR och NOT uttryckt i XOR

$$x + y = x \oplus y \oplus xy \quad (\text{E12})$$

$$x' = x \oplus 1 \quad (\text{E13})$$



Linköpings universitet

expanding reality

www.liu.se