# Fö 2 Boolesk algebra

OH 1-4

## Räkneregler för en variabel (OH 5)

**Ex** Bevisa

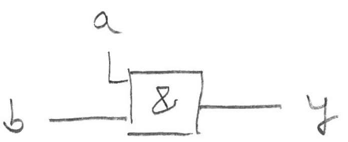
$$(x')' = x \qquad (L9)$$

**Bevis:** Antag att

$x = 0$ : $VL = (0')' \overset{A7}{=} 1' \overset{A8}{=} 0 = HL$

$x = 1$ : $VL = (1')' \overset{A8}{=} 0' \overset{A7}{=} 1 = HL$ $\square$.

**Ex** Illustration av räkneregel och motiv till varför AND-komponenten kallas grind.




Betrakta a som styrsignal.

**Fall 0:** $a = 0 \Rightarrow y = a \cdot b = 0 \cdot b \overset{L6}{=} 0$

$\Rightarrow$ Grinden är stängd

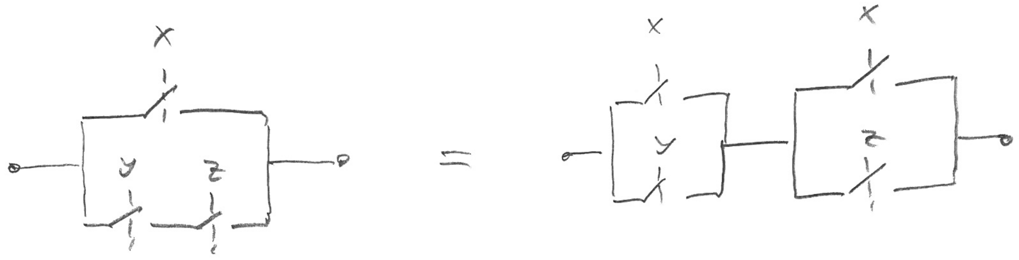
**Fall 1:** $a = 1 \Rightarrow y = a \cdot b = 1 \cdot b \overset{L8}{=} b$

$\Rightarrow$ Grinden är öppen

# Räknelagar för flera variabler (OH 6)

Ex: Illustration av (L15)

$$x + yz = (x+y)(x+z)$$




## En lag/sats kan visas på följande sätt

- Använda satser och axiom (algebra)
- Venn-diagram
- Perfekt induktion, dvs ställa upp sanningstabell

Ex Absorbtion

Visa $x + xy = x$ (L16)

Bevis. Algebra ger

$$VL = x + xy \overset{L8}{=} x \cdot 1 + x \cdot y \overset{L14}{=} x(1+y) =$$

$$\overset{L12,\,L5}{=} x \cdot 1 \overset{L8}{=} x = HL \quad \square .$$

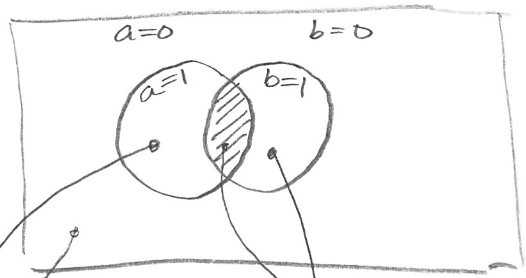
# Venn-diagram

Ex $f = a \cdot b$

- En ring för varje variabel
- En yta för varje variabelvärde

$2^2$ ytor $= 2^2$ värden på $(a,b)$

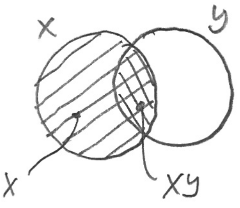
- Skuggad yta = de värden $(a,b)$ som ger $f=1$

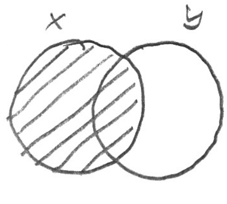



| a | b | f |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Ex Venn-diagram som bevisar absorbtionslagen.

$VL = x + xy$ $\qquad$ $HL = x$



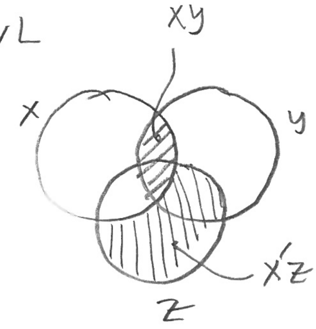




Samma yta skuggad $\Leftrightarrow$ $VL = HL$ $\square$.

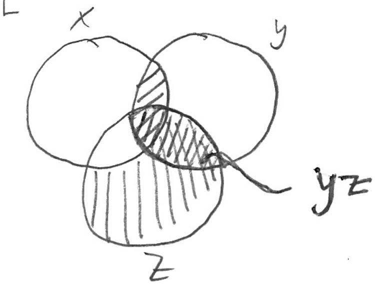
Ex Visa consensuslagen

$$xy + x'z = xy + x'z + yz \qquad (L18)$$

VL




HL




$VL = HL.$ $\square$

Ex Förenkla $a'b' + ab + a'b = /\text{bryt ut}/ =$

$$= a'\underbrace{(b'+b)}_{=1} + ab =$$

$$= a'\cdot 1 + ab = /\text{consensus}/ =$$

$$= a' + \cancel{ab} + 1\cdot b = /\text{absorbtion}/ =$$

$$= a' + b$$

De Morgans lag (viktig vid förenkling)

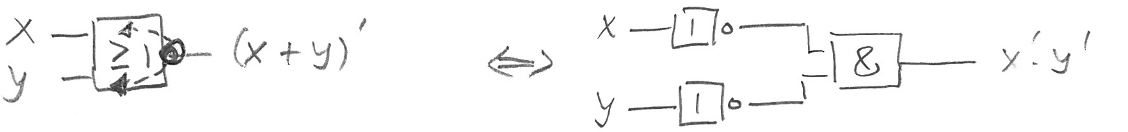
Visa $(x+y)' = x'\cdot y'$ (L20)

| $x$ | $y$ | $x+y$ | $VL=(x+y)'$ | $x'$ | $y'$ | $HL = x'\cdot y'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

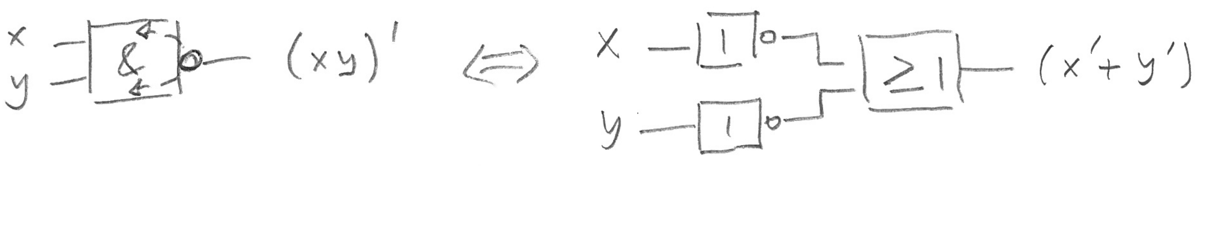
lika! $\Longleftrightarrow$ $VL = HL$ $\square$.

Inverteringen får flyttas in på variablerna om '+' byts mot '·' eller '·' byts mot '+'.

Grafisk tolkning




(L20)




(L21)

# Generalisering av de Morgans lagar

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)' = x_1' \cdot x_2' \cdots x_n'$$

$$(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)' = x_1' + x_2' + \cdots + x_n'$$

## XOR

Används ibland för att minska komponentbehovet

**Axiom**

| $x$ | $y$ | $x \oplus y$ | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | (E1) |
| 0 | 1 | 1 | (E2) |
| 1 | 0 | 1 | (E2) |
| 1 | 1 | 0 | (E3) |

**Räkneregler** OH 7

**Ex** XOR-grinden som styrbar inverterare


Betrakta $s$ som styrsignal

$$s = 0 \Rightarrow u = s \oplus x = 0 \oplus x \overset{E4}{=} x$$

$\Rightarrow$ släpper igenom $x$

$$s = 1 \Rightarrow u = s \oplus x = 1 \oplus x \overset{E13}{=} x'$$

$\Rightarrow$ inverterar $x$

# Koppling mellan XOR och Boolesk algebra

$$x \oplus y = x'y + xy' \qquad \text{(E10)}$$

$$(x \oplus y)' = x'y' + xy \qquad \text{(E11)}$$

Ex Visa (E11).

$$(x \oplus y)' = (x'y + xy')' \overset{\text{de Morgan}}{=} (x'y)' \cdot (xy')' \overset{\text{deMorgan}}{=}$$

$$= (x + y')(x' + y) =$$

$$= \underbrace{xx'}_{=0} + xy + x'y' + \underbrace{yy'}_{=0} = xy + x'y'$$

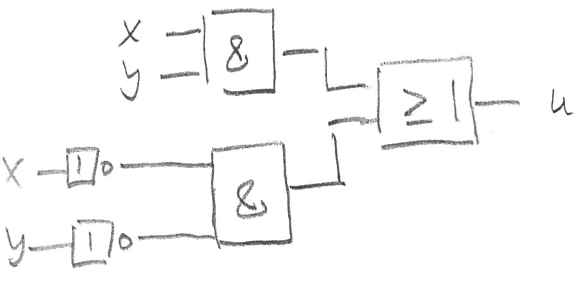
Ex Förenkla och realisera

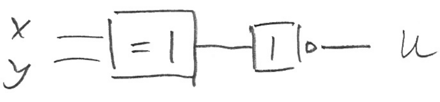
$$u = xy + (x+y)' + x'y'z \overset{\text{de Morgan}}{=}$$

$$= xy + \underline{x'y'} + \underline{x'\cancel{y'}}z \overset{\text{absorbtion}}{=}$$

$$= xy + x'y' \overset{E11}{=} (x \oplus y)'$$

Realiseringar




I detta fall ger XOR-grinden en komponentsnål realisering.