TSTE92
Elektriska kretsar

jω-metoden

Mark Vesterbacka

LINKÖPINGS UNIVERSITET

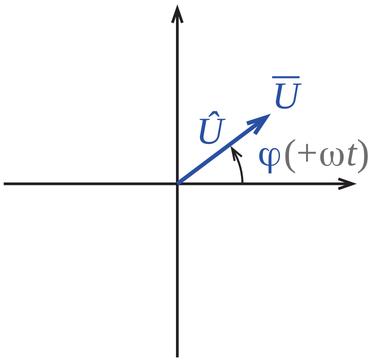
Dagens föreläsning

- Visare
- jω-metoden
- Komplex effekt

Visare

- Sinussignaler kan representeras med visare
- Exempel med spänningsvisare

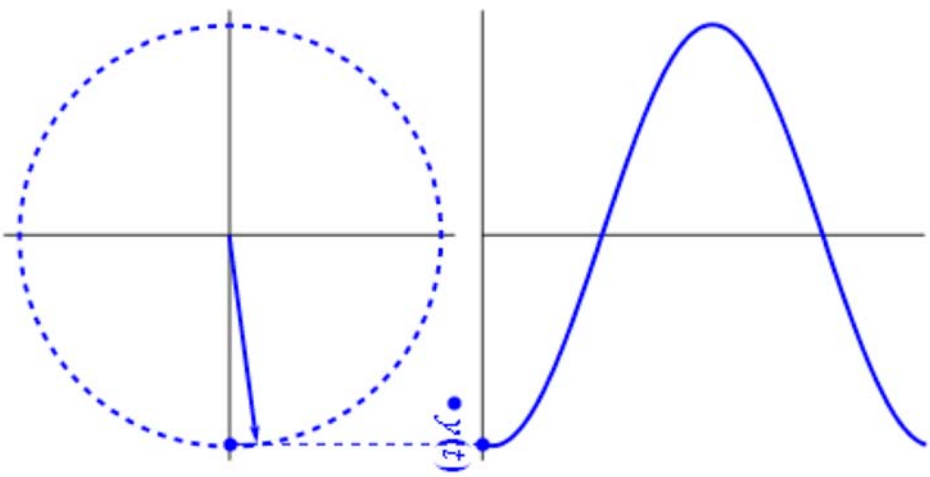
$$u(t) = \hat{U}\sin(\omega t + \varphi) \;\Rightarrow$$



- Alla visare i ett diagram roterar med samma vinkelfrekvens ω, men rotationen tas bort under beräkningar för att förenkla

Animering av visarrotation

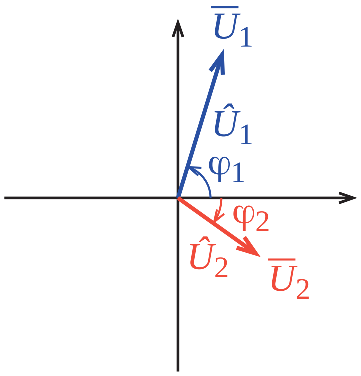
- Se https://en.wikipedia.org/wiki/Phasor

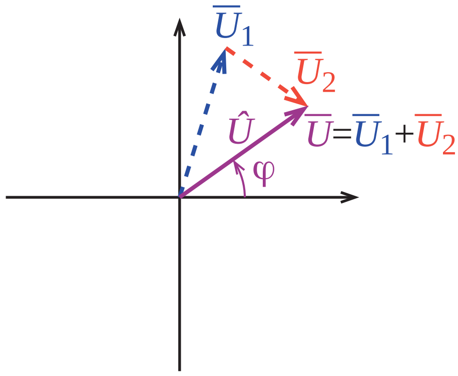


© Gonfer at en.wikipedia

Visaraddition

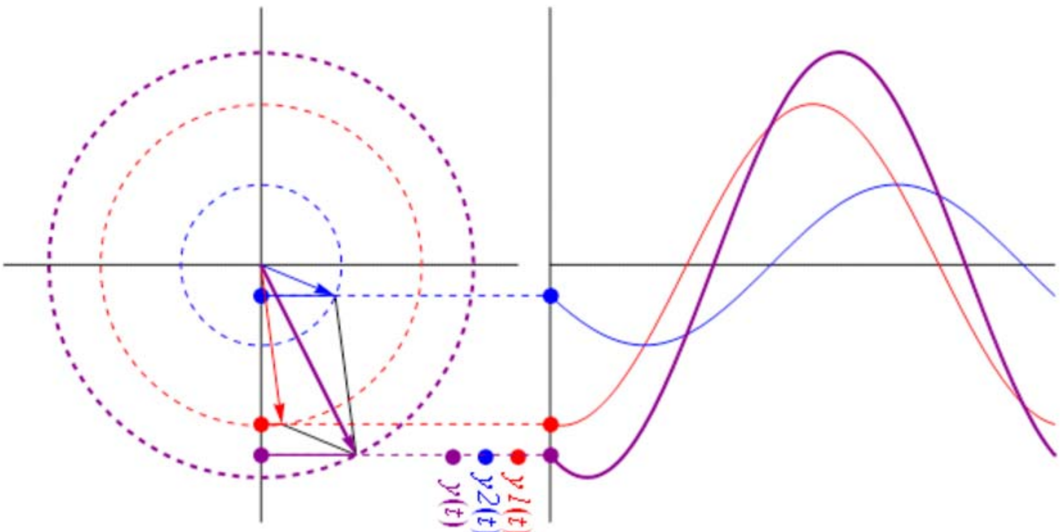
- Sinussignaler representerade med visare kan adderas grafiskt





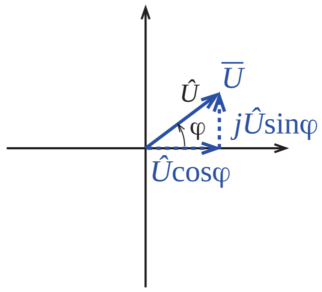
Animering av visaraddition

- Se https://en.wikipedia.org/wiki/Phasor



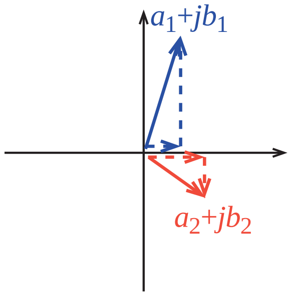
Addition med komplexa tal

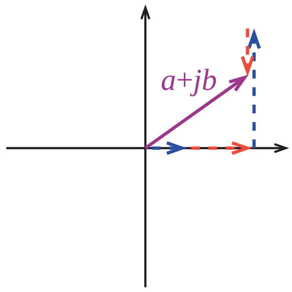
- Placeras visarna i ett komplext talplan …



$$\hat{U}\cos(\varphi) + j\hat{U}\sin(\varphi) = a + jb$$

… så kan sinussignaler adderas som komplexa tal





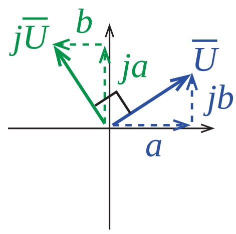
$$(a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

Fasvridning av komplexa tal

- Multiplikation med *j*

$$\overline{U} = a + jb$$
$$j\overline{U} = j(a + jb) = ja - b$$

… fasvrider ett tal med π/2



Polära ↔ kartesiska koordinater

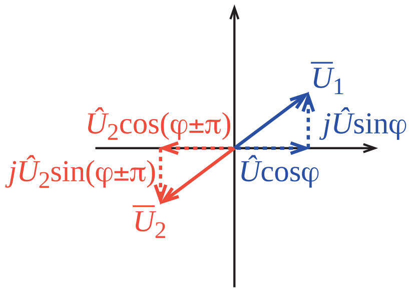
- Polära → kartesiska koordinater

$$\hat{U}e^{j\varphi} = \hat{U}\left[\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)\right] = a + jb \Rightarrow a = \hat{U}\cos(\varphi),\ b = \hat{U}\sin(\varphi)$$

- Kartesiska → polära koordinater

$$\hat{U}e^{j\varphi} = a + jb \Rightarrow \hat{U} = \sqrt{a^2 + b^2},\ \varphi = \mathrm{atan2}(b,a) = \arctan(b/a) + p$$

$$\text{där } p = \begin{cases} \pi & a < 0,\ b \geq 0 \\ 0 & a > 0 \\ -\pi & a < 0,\ b < 0 \end{cases}$$



Impedans för ett motstånd

- *U* över ett motstånd ligger i fas med en sinusformad *I*

- *Impedans* är växelströmsmotståndet <u>med</u> fasförskjutning
- Motståndets impedans

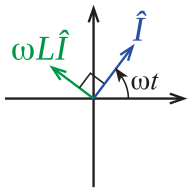
$$Z_R = \frac{U}{I} = \frac{R\hat{I}e^{j\omega t}}{\hat{I}e^{j\omega t}} = R$$, dvs ingen fasförskjutning

Impedans för en spole

- *U* över en spole är fasvriden +*j* relativt *I*

$\hat{I}\,e^{j\omega t}$

Z_L $\quad U = L\dfrac{d(\hat{I}e^{j\omega t})}{dt} = j\omega L\hat{I}e^{j\omega t}$



- Spolens impedans

$$Z_L = \frac{U}{I} = \frac{j\omega L\cdot\hat{I}e^{j\omega t}}{\hat{I}e^{j\omega t}} = j\omega L$$

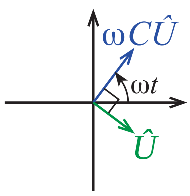
Impedans för en kondensator

- *U* över en kondensator är fasvriden –*j* relativt *I*

$I = C\dfrac{d(-j\hat{U}e^{j\omega t})}{dt} = \omega C\hat{U}e^{j\omega t}$

Z_C $\quad U = -j\hat{U}e^{j\omega t}$

(Vektorns riktning vald för jämförelse)



- Kondensatorns impedans

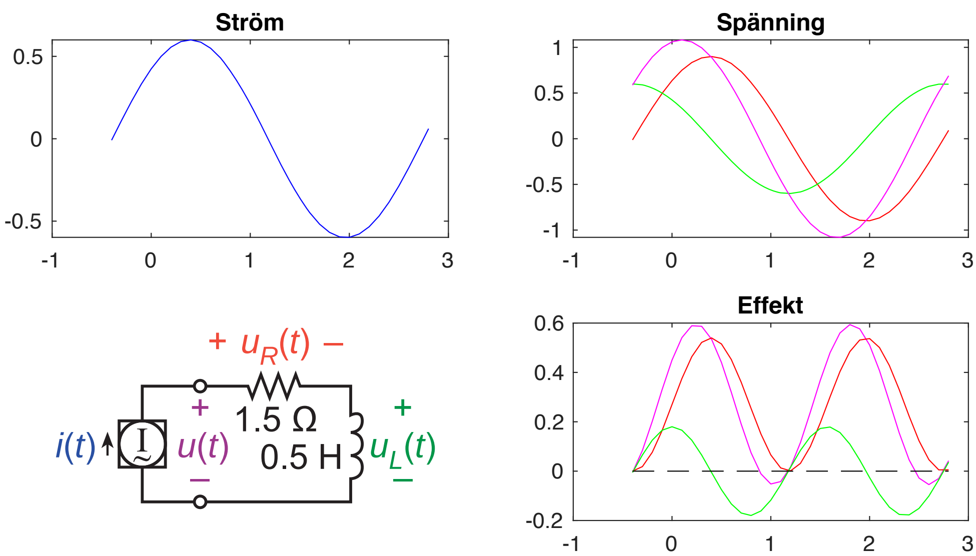
$$Z_C = \frac{U}{I} = \frac{-j\hat{U}e^{j\omega t}}{\omega C\hat{U}e^{j\omega t}} = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$$

jω-metoden

1) Gör ett komplexschema
   - Ersätt sinuskällor $i(t)$ och $u(t)$ med komplexa källor I och U
   - Ersätt R, L och C med komplexa impedanser Z
2) Lös problemet på samma sätt som för likström
   - KCL, KVL och Ohms lag gäller men med R utbytt mot Z
   - Serie- och parallellkoppling av Z fungerar som för R
   - Tvåpolssatsen, Nortons teorem och nodanalys fungerar utmärkt
3) Omvandla komplex lösning till ett tidsuttryck
   - Teckna tidsuttrycket med samma frekvens som i problemet

Effektförbrukning

- Momentaneffekt $p(t) = i(t)\cdot u(t)$



Effektförbrukning i *L* (och *C*)

- Momentaneffekt i *L*

$$p_L(t) = i_L(t)\cdot L\frac{di_L(t)}{dt} = \hat{I}\sin(\omega t+\varphi)\cdot L\omega\hat{I}\cos(\omega t+\varphi) = \omega L\hat{I}^2\frac{\sin(2\omega t+2\varphi)}{2}$$

- Medeleffekt i *L*

$$P_L = \frac{1}{T}\int_0^T p_L(t)\,dt = 0$$

- Momentaneffekt i *C*

$$p_C(t) = \hat{U}\sin(\omega t+\varphi)\cdot C\omega\hat{U}\cos(\omega t+\varphi) = \omega C\hat{U}^2\frac{\sin(2\omega t+2\varphi)}{2}$$

- Medeleffekt i *C*

$$P_C = \frac{1}{T}\int_0^T p_C(t)\,dt = 0$$

Effektivvärde

- Momentaneffekt i *R*

$$p_R(t) = u_R(t)i_R(t) = Ri_R^2(t) = R\hat{I}^2\sin^2(\omega t+\varphi) = R\hat{I}^2\frac{1-\cos(2\omega t+2\varphi)}{2}$$

- Medeleffekt i *R*

$$P_R = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{R\hat{I}^2}{2}$$

- *Effektivvärdet I_e* definieras så att formen för Ohms lag behålls

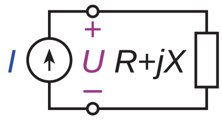
$$P = RI_e^2 = \frac{R\hat{I}^2}{2} \Rightarrow I_e = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$$

- På samma sätt definieras *effektivvärdet U_e* för spänning

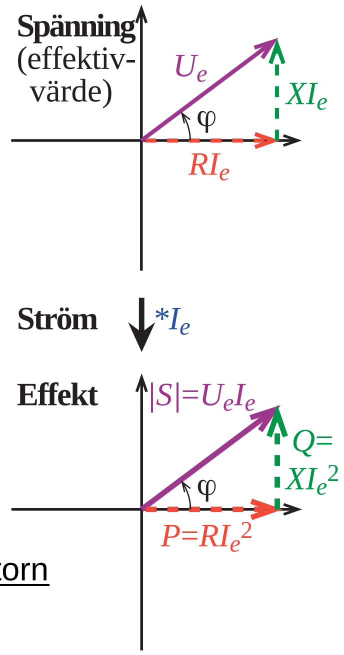
$$P = \frac{U_e^2}{R} = \frac{\hat{U}^2}{2R} \Rightarrow U_e = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

Komplex effekt

- Effekt i $Z = R + jX$



- Effekttriangeln
  - Re{Z} = R förbrukar aktiv effekt P [W]
  - Im{Z} = X överför reaktiv effekt Q [VAr]
  - $S = P + jQ$ kallas komplex effekt [W]
  - $|S|$ kallas skenbar effekt [VA]
- Fasskillnad $\varphi = \varphi_U - \varphi_I \Rightarrow$
  - $P = RI_e^2 = U_eI_e\cos(\varphi)$, $\cos(\varphi)$ kallas effektfaktorn
  - $Q = XI_e^2 = U_eI_e\sin(\varphi)$



Tack för din uppmärksamhet!

~

Nästa onsdag fortsätter vi med filter

www.liu.se