Lektion 8

Uppgifter (Lektion): **2.2, 2.3, 2.20, 2.1, 2.4, 2.5, 2.6, 2.18**

Teoretiska moment: **Switchade kapacitancer (SC), Laddningsanalys**

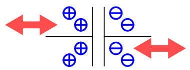
Teori

• Switchade kapacitanser, SC

Fördelar är att slippa realisera resistanser vilket på är mycket önskvärt vid realiseringar av kretsar på chip. En metod för att undersöka hur SC-kretsar beter sig, dvs deras överföringsfunktion, är laddningsanalys.

Laddningsanalys

Betrakta en kondensator.



Laddningen på kondensatorn är lika med kapacitansvärdet gånger spänningen som ligger över plattorna:

$$Q = CV$$

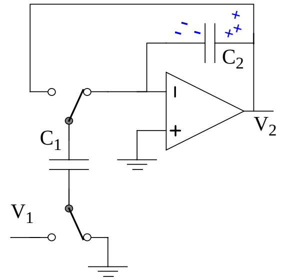
Genom att betrakta laddningarna som mängder som fördelar sig och transporteras mellan olika kondensatorplattor så kan ett flödesschema ställas upp för laddningarna och på så sätt även för spänningarna. Genom att tillåta transporten av laddning vid tidsdiskreta tillfällen och anta att laddningstransporten hinnar avstanna inom dessa tidsintervall så kan ett tidsdiskret system byggas upp.

Tips inför laddningsanalysen:

Laddning kan inte försvinna från en okopplad kondensatorplatta.
På en operationsförstärkare (spänningskontrollerad) är det endast utgången som kan tillföra eller avlägsna laddning.
Om en kondensator switchas till ett laddat kondensatornät så kommer laddning att förflytta sig och till slut nå jämvikt. Genom att anta något om summan av alla laddningar kan ofta viktiga samband uppnås.

Uppgifter

Uppgift 2.2



Undersök kretsen för dels

$C_1 = C_2$ och $C_1 = 1.12C_2$

Härled överföringsfunktionen

$$H[z] = \frac{V_1[z]}{V_2[z]}$$

Betrakta först tidpunkten t:

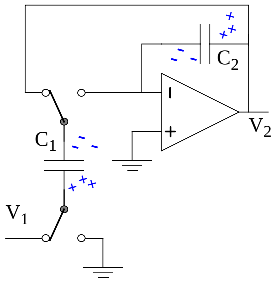
Laddningen i kondensator C_1 är:

$$q_1(t) = 0.$$

Laddningen i kondensator C_2 är:

$$q_2(t) = C_2 v_2(t)$$

Detta är i princip ett redundant steg eftersom vi inte vet någonting om kretsen.

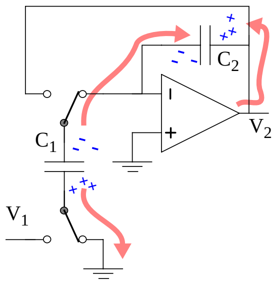


Vid tidpunkt $t + \tau$ har switchen slagit om. Därmed kan kondensator C_1 laddas upp med hjälp av $v_1(t + \tau)$ och operationsförstärkarens utgång som skjuter till laddning. Detta ger att

laddningen i kondensator C_1 är:

$$q_1(t + \tau) = C_1[v_1(t + \tau) - v_2(t + \tau)]$$

observera definitionen av tecknet på laddningen.



laddningen i kondensator C_2 är:

$$q_2(t + \tau) = C_2 v_2(t + \tau).$$

Dessutom måste

$$q_2(t + \tau) = q_2(t) \text{ dvs } v_2(t + \tau) = v_2(t)$$

eftersom ingen laddning kan försvinna från C_2:s negativa platta.

Vid tidpunkt $t + 2\tau$ så sluter sig switchen igen. Kondensator C_1 kopplas in mellan jord och virtuell jord – negativa ingången på operationsförstärkaren. Därmed är C_1 kortsluten. Den positiva laddningen “rinner ut” i jorden och den negativa laddningen har ingen annan stans att ta vägen än till den negativa plattan på C_2.
Den extra positiva laddningen som då behövs till kondesator C_2 ges från utgången på operationsförstärkaren.
Laddningen i kondensator C_1 måste vara

$$q_1(t + 2\tau) = 0$$

Laddningen i kondensator C_2 måste vara

$$q_2(t+2\tau) = C_2 v_2(t+2\tau)$$

Om vi betraktar den negativa laddningen i kondensatorerna så inses att:

$$-q_2(t+2\tau) = -q_2(t+\tau) + (-q_1(t+\tau)) = -q_2(t) - q_1(t+\tau)$$

Detta ger att

$$C_2 v_2(t+2\tau) = C_2 v_2(t) + C_1[v_1(t+\tau) - v_2(t+\tau)] =$$

$$= C_2 v_2(t+\tau) + C_1[v_1(t+\tau) - v_2(t+\tau)]$$

Enligt samma antagande som gjordes vid tidpunkten $t+\tau$ så måste

$$v_2(t+2\tau) = v_2(t+3\tau)$$

vilket ger att:

$$C_2 v_2(t+3\tau) - C_2 v_2(t+\tau) + C_1 v_2(t+\tau) = C_1 v_1(t+\tau)$$

Z-transformera båda led, sätt $t = kT$ och $2\tau = T$:

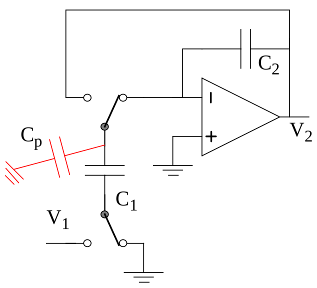
$$[C_2 z^{3/2} - C_2 z^{1/2} + C_1 z^{1/2}]V_2[z] = C_1 z^{1/2} V_1[z]$$

vilket ger överföringsfunktionen:

$$H[z] = \frac{V_2[z]}{V_1[z]} = \frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{z^{1/2}}{z^{3/2} - (1 - C_1/C_2)} = \frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{1}{z - (1 - C_1/C_2)}$$

En parasitkapacitans kan associeras med switcharna på kondensator C_1 och som leder ner till jord kommer fördärva uppladdningen av kondensator C_1. Laddningen på parasitkapacitansen blir:

$$q_p(t+\tau) = C_p v_1(t+\tau)$$



Denna “parasitladdning” kommer därefter att sprida sig till C_2.

I det första fallet var

$$C_1 = C_2$$

Vilket ger att kretsen blir ett rent fördröjningselement (sample-and-hold)

$$H[z] = \frac{1}{z}$$

I det andra fallet är

$$C_1 = 1.12 C_2$$

och kretsen har en pol i $z = -0.12$

$$H[z] = \frac{1.12}{z + 0.12}$$

Detta är ett knep för att förminska inflytandet av sinc-viktningen (jämför uppgift 2.1) av den tidsdiskreta signalen. Absolutbeloppet av $H[z]$ (amplitudkarakteristiken) häver – approximativt – den amplitudinverkan som sinc-funktionen ger.

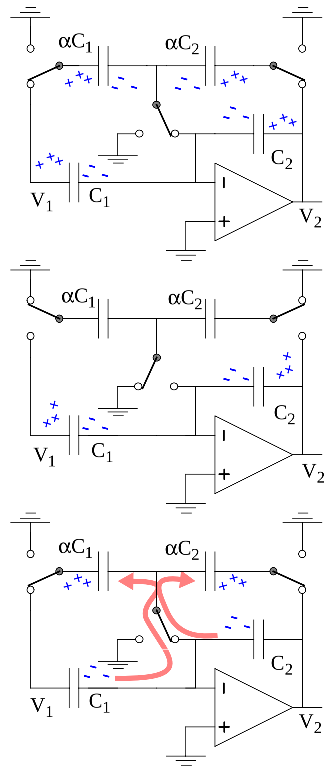
Uppgift 2.3

Härled de olika överföringsfunktionerna för SC-kretsarna i kompendiumet.

Differentiell integrator
Summerande integrator
Summerande och inverterande integrator
Billinjär integrator
Knobs bilinjära integrator.

Uppgift 2.20

Bestäm överföringsfunktionen $H[z]$.



Vid tidpunkten t kan laddningarna i kondensatorerna skrivas som:

$$q_1(t) = C_1 v_1(t)$$

$$q_2(t) = C_2 v_2(t)$$

$$q_{\alpha 1}(t) = \alpha C_1 v_1(t)$$

$$q_{\alpha 2}(t) = \alpha C_2 v_2(t)$$

Vid tidpunkten $t+\tau$ urladdas kondensatorerna αC_1 och αC_2 helt och hållet (båda plattor till jord). Däremot så måste den totala laddningen på kondensatorerna C_1 och C_2 vara den samma.
(Förändringar i insignalen kommer göra att lite laddning skyfflas från C_2 till C_1 eller tvärtom, men summan – observera tecken ! – måste bevaras eftersom ingen laddning kan lämna ingången på operationsförstärkaren.). Detta ger:

$$q_1(t+\tau) + q_2(t+\tau) = q_1(t) + q_2(t)$$

$$q_{\alpha 1}(t+\tau) = q_{\alpha 2}(t+\tau) = 0$$

Vid tidpunkten $t+2\tau$ kan samma resonemang användas som vid den förra tidpunkten, dvs att ingen laddning kan försvinna från ingången på operationsförstärkaren. Den måste sprida sig till de andra kapacitanserna (oladdade) som kopplas in med switcharna. Dvs att:

$$q_1(t+\tau) + q_2(t+\tau) = q_1(t+2\tau) + q_2(t+2\tau) + q_{\alpha 1}(t+2\tau) + q_{\alpha 2}(t+2\tau) =$$

$$= q_1(t) + q_2(t)$$

Med uttrycken för laddningarna ersatta så fås att:

$$C_1 v_1(t) + C_2 v_2(t) = (1+\alpha) C_1 v_1(t+2\tau) + (1+\alpha) C_2 v_2(t+2\tau)$$

Ersätt $t = kT$, $2\tau = T$ och z-transformera båda led vilket ger systemfunktionen:

$$H[z] = \frac{V_2[z]}{V_1[z]} = -\frac{C_1(1+\alpha)z-1}{C_2(1+\alpha)z-1} = -\frac{C_1}{C_2}\frac{z-\frac{1}{1+\alpha}}{z-\frac{1}{1+\alpha}} = -\frac{C_1}{C_2}$$

dvs en inverterande förstärkare. Polen släcks ut av nollstället i samma position.

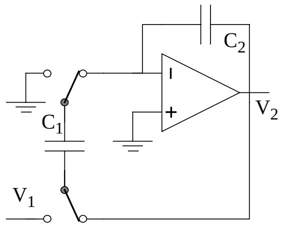
Uppgift 2.1

Spektrum i översta bilden visar tidsdiskret (samplat) system medan spektrumanalysatorn visar spektrum för en kontinuerlig signal. Den kontinuerliga signalen är styckvis konstant, dvs att den består av ett pulståg där pulsernas amplitud är given av det samplade värdet och pulsernas bredd är given av klockfrekvensen. Den tidskontinuerliga signalen beskrivs av

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)[u(t-kT) - u(t-(k+1)T)]$$

där T är perioden på klockan. Fouriertransformen för detta uttryck blir då lika med den ursprungliga signalen gånger en sinc-funktion – nästan sant skall formuleras bättre... Jämför återskapande av funktioner med PAM.

Uppgift 2.4



Betrakta vid tidpunkten t:
Laddningen i C_1 är då:

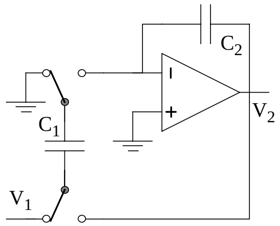
$$q_1(t) = C_1 v_2(t) \text{ och } q_2(t) = C_2 v_2(t)$$

Vid tidpunkten $t+\tau$:
Kondensator C_1 laddas av $v_1(t)$ enligt:

$$q_1(t+\tau) = C_1 v_1(t+\tau)$$

medan kondensator C_2 bibehåller sin laddning, dvs

$$q_2(t) = C_2 v_2(t) = q_2(t+\tau) = C_2 v_2(t+\tau)$$



Vid tidpunkt $t+2\tau$ så kopplas kondensatorn om:

$$q_1(t+2\tau) = C_1 v_2(t+2\tau)$$

Laddningen som tidigare låg på C_1 kommer omfördelas mellan C_2 och C_1 på ett sådant sätt att den totala laddningen bevaras, dvs att

$$q_1(t+2\tau) + q_2(t+2\tau) = q_1(t+\tau) + q_2(t+\tau)$$

$$C_1 v_2(t+2\tau) + C_2 v_2(t+2\tau) = C_1 v_1(t+\tau) + C_2 v_2(t+\tau) =$$

$$= (C_1 + C_2) v_2(t+2\tau)$$

Vid tidpunkt $t+3\tau$:
Laddningen i kondensator C_2 bevaras, dvs att

$$v_2(t+3\tau) = v_2(t+2\tau)$$

Detta kan sammanfattas till:

$$(C_1 + C_2)v_2(t+3\tau) - C_2 v_2(t+\tau) = C_1 v_1(t+\tau)$$

Ersätt $t = kT$ och $T = 2\tau$ och z-transformera:

$$(z^{3/2}(C_1 + C_2) - z^{1/2}C_2)V_2[z] = C_1 z^{1/2} V_1[z]$$

$$H[z] = \frac{V_2[z]}{V_1[z]} = \frac{C_1}{z(C_1+C_2) - C_2} = \frac{\frac{C_1}{C_1+C_2}}{z - \frac{C_2}{C_1+C_2}}$$

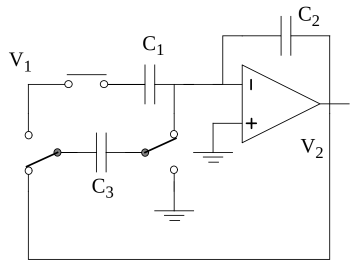
En sample-and-hold-krets har överföringsfunktionen

$$H[z] = \frac{1}{z}$$

för att åstadkomma en överföringsfunktion som liknar detta så måste $C_1 \gg C_2$.

Till skillnad från kretsen i 2.2 så kommer i detta fall parasitkapacitansen vara kopplad mellan switchen och jord samtidigt som kapacitansen C_1 är detta. Detta medför att uppladdningen av C_p kommer att samverka med kapacitansen C_1.

Uppgift 2.5



Vid tidpunkten t beskrivs laddningarna av:

$$q_1(t) = C_1 v_1(t)$$

$$q_2(t) = C_2 v_2(t)$$

$$q_3(t) = C_3 v_2(t)$$

Efter omslag vid tidpunkten $t+\tau$:

Laddningen i C_1 bevaras:

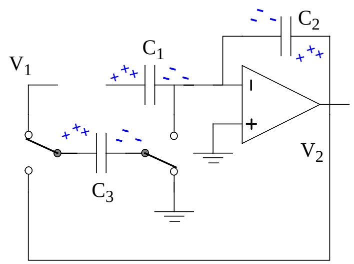
$$q_1(t+\tau) = q_1(t)$$

Laddningen i C_2 bevaras:

$$q_2(t+\tau) = q_2(t)$$

Laddningen i C_3 ersätts med ny laddning:

$$q_3(t+\tau) = C_3 v_1(t+\tau)$$



Vid tidpunkten $t+2\tau$:

Den totala laddningen som ligger på de tre kondensatorerna beskrivs av:

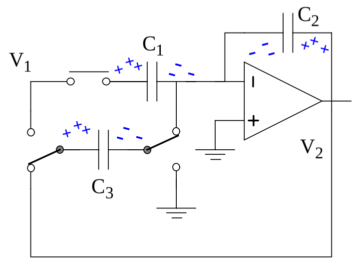
$$q_1(t+2\tau) + q_2(t+2\tau) + q_3(t+2\tau)$$

där

$$q_1(t+2\tau) = C_1 v_1(t+2\tau)$$

$$q_2(t+2\tau) = C_2 v_2(t+2\tau)$$

$$q_3(t+2\tau) = C_3 v_2(t+2\tau)$$



Denna totala laddning måste vara lika med den totala laddning som tidigare låg på de tre kondensatorerna. (Ingen laddning kan tillkomma eller försvinna via ingången på operationsförstärkaren.) Detta ger:

$$q_1(t+2\tau) + q_2(t+2\tau) + q_3(t+2\tau) =$$

$$= q_1(t+\tau) + q_2(t+\tau) + q_3(t+\tau) =$$

$$= q_1(t) + q_2(t) + q_3(t+\tau)$$

Sätt in uttrycken för laddningarna:

$$(C_2 + C_3)v_2(t+2\tau) + C_1 v_1(t+2\tau) = C_1 v_1(t) + C_2 v_2(t) + C_3 v_1(t+\tau)$$

vilket ger

$$v_2(t+2\tau) - \frac{C_2}{C_2+C_3} v_2(t) = \frac{C_1}{C_2+C_3}\left[v_1(t) + \frac{C_3}{C_1} v_1(t+\tau) - v_1(t+2\tau)\right]$$

Inför $t = kT$ och $T = 2\tau$ samt z-transformera:

$$H[z] = \frac{V_2[z]}{V_1[z]} = \frac{C_1}{C_2+C_3} \frac{1 + \frac{C_3}{C_1} z^{1/2} - z}{z - \frac{C_2}{C_2+C_3}} = -\frac{C_1}{C_2+C_3} \frac{z - \left(1 + \frac{C_3}{C_1} z^{1/2}\right)}{z - \frac{C_2}{C_2+C_3}}$$

Vi ser att utsignalen är påverkad av insignalen varje halva klockperiod. För att konstruera ett första ordningens allpassfilter så kan detta göras på två sätt:
1) Eliminera $z^{1/2}$ genom att "baka in $z^{1/2}$ med ettan":

$$z^{1/2} V_1[z] = V_1[z], \text{ dvs att } v_1(t) = v_1(t+\tau)$$

2) Eliminera $z^{1/2}$ genom att "baka in $z^{1/2}$ med z":

$$z^{1/2} V_1[z] = z V_1[z], \text{ dvs att } v_1(t+\tau) = v_1(t+2\tau)$$

Dessutom måste gälla att om polen är given av $z = p$ så är nollstället givet av $z = 1/p$. Detta ger de två alternativen:

$$H_1[z] = -\frac{C_1}{C_2+C_3} \cdot \frac{z - \frac{C_1+C_3}{C_1}}{z - \frac{C_2}{C_2+C_3}} \text{ och } H_2[z] = -\frac{C_1}{C_2+C_3} \cdot \left(1 - \frac{C_3}{C_1}\right) \frac{z - \frac{1}{1 - C_3/C_1}}{z - \frac{C_2}{C_2+C_3}}$$

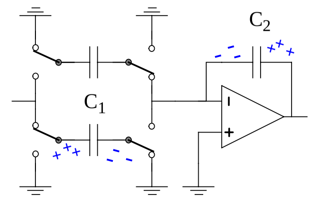
Kraven på kondensatorerna blir alltså att

$$\frac{C_1+C_3}{C_1} = \frac{C_2+C_3}{C_2} \Rightarrow C_2 = C_1 \text{ och } 1 - \frac{C_3}{C_1} = \frac{C_2}{C_2+C_3} \Rightarrow C_1 = C_2 + C_3$$

Notation:

I det andra fallet borde uttrycket multipliceras med $z^{-1/2}$ eftersom det antas att $v_1(t+\tau) = v_1(t+2\tau)$ och att utsignalen skiftas ut "innan" $v_1(t+2\tau)$ antagit sitt värde.

Uppgift 2.6

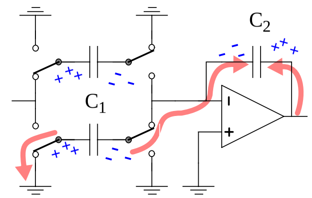


Vid tidpunkten t så laddas den nedre C_1 kondensatorn med

$$q_{N1}(t) = C_1 v_1(t)$$

Laddningen i den övre kondensatorn töms eftersom den är kortsluten mellan jord och virtuell jord.

$$q_{U1}(t) = 0$$



Vid tidpunkten $t+\tau$ så laddas den övre kondensatorn upp med laddningen

$$q_{U1}(t+\tau) = C_1 v_1(t+\tau)$$

Den undre kondensatorn kommer att laddas ur eftersom den är kortsluten. Dock kommer all laddning som ligger på kondensatorns ena platta att glida över till kondensator C_2. Dess motsvarande platta kommer att få ett laddningstillskott via operationsförstärkarens utgång. Detta ger att laddningen i C_2 kan skrivas som

$$q_2(t+\tau) = C_2 v_2(t+\tau) = q_2(t) + q_{N1}(t) = C_2 v_2(t) + C_1 v_1(t)$$

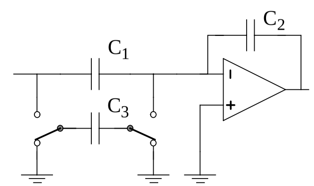
På samma sätt kan man inse att (på grund av de symmetriska "inkondensatorerna"):

$$q_2(t+2\tau) = C_2 v_2(t+2\tau) = q_2(t+\tau) + q_{U1}(t+\tau) = C_2 v_2(t+\tau) + C_1 v_1(t+\tau)$$

Läggas till mer här...

Ett annat sätt att se det på är att helt enkelt konstatera att insignalen switchas in vid varje halv klockcykel och att man kan tänka sig kretsen som om det var en dubbelsamplande krets. Dvs att samplingsfrekvensen är lika med dubbla klockfrekvensen.

Uppgift 2.18



Allmän överföringsfunktion för en bilinjär integrator:

$$H[z] = K\frac{z-1}{z+1}$$

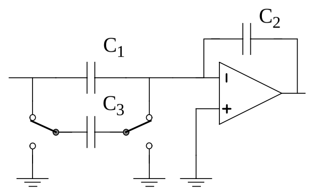
Vid tidpunkten t så gäller att laddningen i kondensatorerna är:

$$q_1(t) = C_1 v_1(t)$$

$$q_2(t) = C_2 v_2(t)$$

$$q_3(t) = 0 \text{ (totalt kortsluten)}$$

Vid tidpunkten $t + \tau$ så kopplas kondensator C_3 in parallellt med C_1 och kommer drämed att “stjäla laddning”.



$$q_1(t+\tau) = C_1 v_1(t+\tau)$$

$$q_2(t+\tau) = C_2 v_2(t+\tau)$$

$$q_3(t+\tau) = C_3 v_1(t+\tau)$$

På grund av C_3 så kommer laddningen som var kopplad till ingången på operationsförstärkaren att fördelas på de tre kondensatorerna på ett sådant sätt att:

$$q_1(t+\tau) + q_2(t+\tau) + q_3(t+\tau) = q_1(t) + q_2(t)$$

Med samma resonemang så inses att den laddning (summan) som finns på C_1 och C_2 måste bevaras till nästa steg då C_3 kopplas ur igen:

$$q_1(t+\tau) + q_2(t+\tau) = q_1(t+2\tau) + q_2(t+2\tau)$$

Dessa ekvationer kan sammanfattas enligt:

$$q_1(t) + q_2(t) = q_3(t+\tau) + q_1(t+2\tau) + q_2(t+2\tau) \text{ dvs}$$

$$C_1 v_1(t) - C_1 v_1(t+2\tau) - C_3 v_1(t+\tau) = C_2[v_2(t+2\tau) - v_2(t)]$$

$$v_2(t+2\tau) - v_2(t) = -\frac{C_1}{C_2}\left[v_1(t+2\tau) + \frac{C_3}{C_1}v_1(t+\tau) - v_1(t)\right]$$

Antag att $v_1(t) = v_1(t+\tau)$ (dvs att det finns en sample-and-hold-krets på ingången) vilket gör att vi slipper en $z^{1/2}$-term i överföringsfunktionen. Inför $t = kT$, $2\tau = T$ och z-transformera:

$$\frac{V_2[z]}{V_1[z]} = -\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{z + \frac{C_3}{C_1} - 1}{z - 1}$$

Välj $C_3 = 2C_1$ så fås att

$$H[z] = \frac{V_2[z]}{V_1[z]} = -\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Notation:

Förutsättningarna för härledningen är att inga mellanresultat beaktas (sambanden mellan laddningsanalysen kan kastas om lite grann) dvs att utsignalen bara betraktas i tidpunkterna t, $t + 2\tau$, $t + 4\tau$, …