Lektion 9

Uppgifter (Lektion): **2.7, 2.10, 2.11**

Uppgifter (Rek.): *2.9, 2.8*

Teoretiska moment: **SC-filter**

Teori

• Byggblock

Integratorer

De viktigaste byggblocken som används i SC-filter är samma typ av kretsar som för de tidskontinuerliga filtren, dvs summerande integratorer.

Parasitkapacitanser

En viktig faktor som påverkar SC-kretsarna är inverkan av parasitkapacitanser.

• SC-filter

Leapfrogfilter

I de många fall utgår man från ett analogt tidskontinuerligt referensfilter när man skapar sina SC-filter. En vanlig typ av SC-filter är just leapfrogfiltret där man använder sig av summerande integratorer som viktiga byggblock. Oftast transformeras referensfiltret till ett tidsdiskret filter genom till exempel LDI-transformation eller bilinjär transformation.

LDI-transformation

Lossless Discrete Integrator.

$$s = s_0[z^{1/2} - z^{-1/2}] = s_0\frac{1-z^{-1}}{z^{-1/2}} = s_0\frac{z-1}{z^{1/2}}$$

Låt $s = j\omega$ och $z = e^{j\Omega}$ vilket ger att

$$\omega = 2s_0\sin(\Omega/2) \text{ dvs } s_0 = \frac{\omega}{2\sin(\Omega/2)}$$

ω betecknar den tidskontinuerliga frekvensen och Ω den tidsdiskreta.
På grund av den mapping som LDI använder så ses också att

$$\omega < 2s_0$$

Dvs att filtrena måste vara smalbandiga, vilket är en nackdel med LDI-transformation.

Ur dessa samband kan ses att

$$s = s_0\left[\frac{1}{z^{-1/2}} - z^{-1/2}\right] \Rightarrow \frac{s}{s_0} = \frac{1-(z^{-1/2})^2}{z^{-1/2}} \Rightarrow (z^{-1/2})^2 + \left(\frac{s}{s_0}\right)z^{-1/2} - 1 = 0$$

vilket ger att

$$z^{-1/2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_0}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{s}{s_0}\right)^2 + 1} = -j\frac{\omega}{2s_0} + \sqrt{1-\left(\frac{\omega}{2s_0}\right)^2} =$$

$$= -\frac{s}{\omega}\sin(\Omega/2) \pm \sqrt{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2(\sin(\Omega/2))^2 + 1} = \cos(\Omega/2) - j\sin(\Omega/2)$$

Bilinjär transformation

Transformationen bestäms av

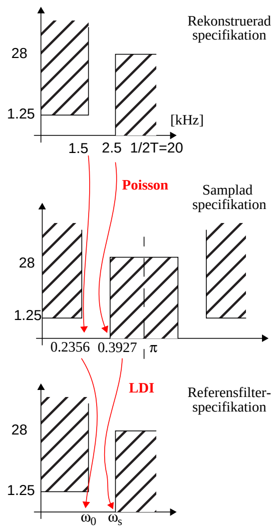
$$s = s_0\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = s_0\frac{z-1}{z+1} \text{ och } z = \frac{1+s/s_0}{1-s/s_0}$$

Förhållandet mellan frekvenserna fås enligt

$$\omega = s_0\tan(\Omega/2)$$

Uppgifter

Uppgift 2.7



Konstruera ett LDI-filter. LDI-transformeringen ger att:

$$s = s_0\frac{z-1}{z^{1/2}}$$

I referensfilterspecifikationen väljs

$$\omega_c = 2\pi \cdot 1500 \text{ rad/s}$$

Av detta kan s_0 beräknas till

$$s_0 = \frac{\omega_c}{2\sin(\Omega_c/2)} =$$

$$= \frac{3000\pi}{2\sin\left(\left(\frac{1.5}{40}2\pi\right)/2\right)} \approx 40.093 \text{ krad/s}$$

Därefter beräknas ω_s till

$$\omega_0 = 2s_0\sin(\Omega_s/2) \approx$$

$$\approx 2 \cdot 40093 \cdot \sin\left(\left(\frac{2.5}{40}2\pi\right)/2\right) \approx$$

$$\approx 15.643 \text{ krad/s}$$

Börja med att konstruera ett strömmatat elliptiskt referensfilter, leta upp ordningen för filtret i formelsamling (sidan 49). Gradtalet hittas till $N = 3$.

Antag vidare att avslutningsresistansen är lika med lastresistansen, dvs att

$$\kappa^2 = 1 \text{ och välj } R_i = R_0 = 1k\Omega$$

Välj i tabellen ett A_{min} som är större än specifikationen, $A_{min} = 29.74$, för “att vara på säkra sidan”. Detta ger de normerade värdena:

$$C_{1n} = C_{3n} = 1.9314,\ C_{2n} = 0.3781 \text{ och } L_{2n} = 0.7571$$

Värdena avnormeras enligt:

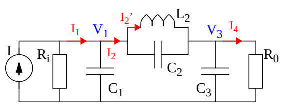
$$L_i = \frac{R_0}{\omega_0}L_{in} \text{ och } C_i = \frac{1}{\omega_0 R_0}C_{in}$$

Detta ger att:

$$C_1 = C_3 = 204.9nF$$

$$L_2 = 80.3mH$$

$$C_2 = 40.1nF$$



I uppgiften var dessutom givet att:

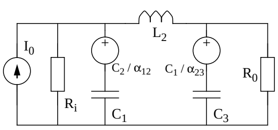
$$\frac{1}{2T} = 20kHz \text{ vilket ger att } \Omega_c = \frac{1.5k}{20k}\pi \approx 0.2356$$

Enligt samma filterdesign som för de tidskontinuerliga filtren så skrivs förhållandet mellan spänningar och strömmar upp, alla variabler normeras med ett R så att:

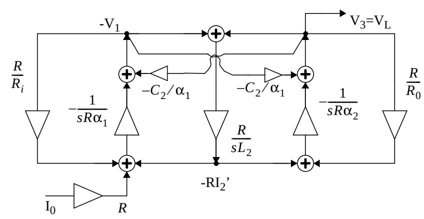
$$RI_0 = RI_i - \frac{R}{R_i}V_1 \quad V_1 = \frac{1}{sRC_1}(RI_0 - RI_2) \quad RI_2 = \frac{R}{(sL_2)\,\|\,(1/sC_2)}(V_1 - V_3)$$

$$V_3 = \frac{1}{sRC_3}(RI_2 - RI_4) \quad RI_4 = \frac{R}{R_0}V_3 = \frac{R}{R_0}V_L$$

Ekvationerna modifieras dock genom att införa en hjälpström genom spole L_2 vilket ger en annan struktur på nätet och därefter flyttas inverterare genom nätet (jämför lektion 7).

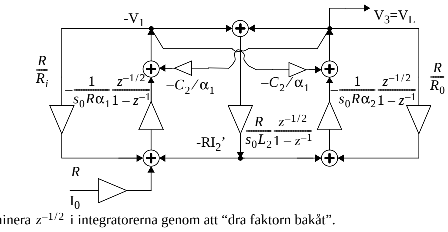


Med hjälp av detta så kan signalflödesschemat skrivas upp för filtret.

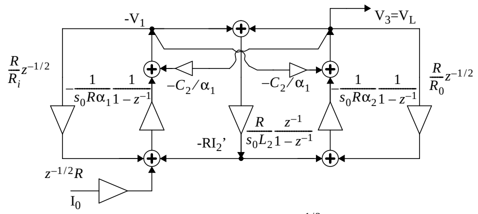


LDI-transformera genom att sätta alla

$$s = s_0\frac{z-1}{z^{1/2}}$$



Elminera $z^{-1/2}$ i integratorerna genom att "dra faktorn bakåt".



Man kan därmed se att alla integratorer blivit kvitt sina $z^{-1/2}$ termer, däremot är sidoåterkopplingarna nu bundna med en $z^{-1/2}$-term. Detta är inte möjligt att realisera. Ett sätt att eliminera detta är att helt enkelt slopa $z^{-1/2}$-termen i uttrycket. Detta kan göras på grund av att de integratorer som skall användas i realiseringen inte kan simulera en överföringsfunktion som har en halv klockcykels fördröjning (bland annat på grund av att klockningsschemat ser ut som det gör). Att eliminera

$$\frac{R}{R_L}z^{-1/2}$$

kan dock göras om man antar att resistanserna i ursprungsschemat har utseendet:

$$R_L = R_L z^{-1/2}$$

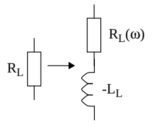
Som dock syntes i teoridelen för LDI-transformation så innehöll $z^{-1/2}$ värdefull frekvensinformation.

$$z^{-1/2} = -j\frac{\omega}{2s_0} + \sqrt{1-\left(\frac{\omega}{2s_0}\right)^2}$$

Detta innebär att termen

$$R_L z^{-1/2} = R_L\left[-j\frac{\omega}{2s_0} + \sqrt{1-\left(\frac{\omega}{2s_0}\right)^2}\right] =$$

$$= R_L\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{2s_0}\right)^2} - j\omega\frac{R_L}{2s_0} = R_L(\omega) - j\omega L_L$$



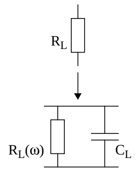
Vilket kan realiseras med en frekvensberoende resistans i seri med en negativ induktans.

Detta uttryck kan med hjälp av komplextalsräkning också skrivas som:

$$R_L z^{-1/2} = \frac{(R_L(\omega) - j\omega L_L)(R_L(\omega) + j\omega L_L)}{R_L(\omega) + j\omega L_L} =$$

$$= \frac{R_L^2 \cdot 1}{R_L\sqrt{1-(\omega/2s_0)^2} + j\omega R_L/2s_0} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{R_L/\sqrt{1-(\omega/2s_0)^2}} + \dfrac{1}{R_L/(j\omega/2s_0)}} = R_L(\omega) \parallel C_L$$



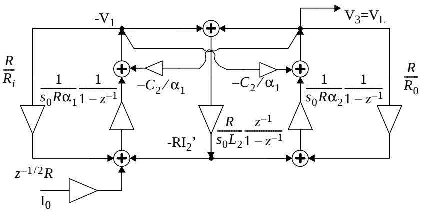
Vilket kan tolkas som en frekvensberoende resistans parallellt med en kapacitans.

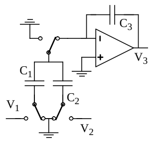
Detta sista fall kan användas i detta filter. Man kan tänka sig att C_L är parallellkopplad med C_3 och motsvarande för inresistansen där C_i är parallellkopplad med C_1. Detta måste korrigeras genom att låta komponenterna anta värdena:

$$C_1' = C_1 - C_i = C_1 - 1/2s_0R_i = C_1 - \sin(\Omega_0 T/2)/(\omega_0 R_i) \text{ och}$$

$$C_3' = C_3 - C_L = C_3 - 1/2s_0R_L = C_3 - \sin(\Omega_0 T/2)/(\omega_0 R_L)$$

Felet som orsakas av den frekvensberoende resistansen låts vara kvar. Därmed återstår att realisera själva filtret. (Eliminera $z^{-1/2}$:orna samt ersätt alla C_1 och C_3 med C_1' respektive C_3'. Vilket också ger att α_1 och α_3 ändras till α_1' respektive α_3'.



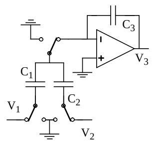


Integratorerna (två inverterande förstärkare utan fördröjning och en förstärkare med fördröjning) ersätts med deras motsvarande SC-kretsar.

Den summerande integratorns överföringsfunktion är given av

$$V_3[z] = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\left[\frac{C_1}{C_3}V_1[z] + \frac{C_2}{C_3}V_2[z]\right]$$

(Snabbkontroll: Ingen direktkoppling mellan in och ut.)



Den summerande och inverterande integratorns överföringsfunktion är given av:

$$V_3[z] = -\frac{1}{1-z^{-1}}\left[\frac{C_1}{C_3}V_1[z] + \frac{C_2}{C_3}V_2[z]\right]$$

(Snabbkontroll: Direktkoppling mellan in och ut.)

(Laddningarna som "skiftas" in på C_3 är direkta linjärkombinationer av insignalerna $v_1(t)$ och $v_2(t)$.)

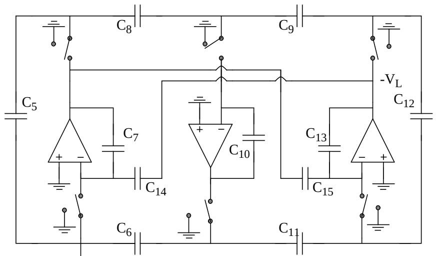
Integratorerna används i realiseringen. Det som återstår är att identifiera storlekarna på kondensatorerna, detta görs genom att jämföra signalvägarna i SC-filtret med dem i signalflödesschemat: (bör skrivas om saknas termer för återkopplingar.)

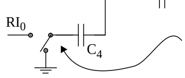
SC-filter	Signalflödesschema	Resultat
$[-V_1]_E = -\frac{C_4}{C_7}\frac{z^{-1/2}}{1-z^{-1}}$	$[-V_1]_E = -\frac{1}{s_0R\alpha_1'}\cdot\frac{z^{-1/2}}{1-z^{-1}}$	$\frac{C_4}{C_7} = \frac{1}{s_0R\alpha_1'}$
$[-V_1]_{-RI_2'} = -\frac{C_6}{C_7}\frac{1}{1-z^{-1}}$	$[-V_1]_{-RI_2'} = -\frac{1}{s_0R\alpha_1'}$	$\frac{C_6}{C_7} = \frac{1}{s_0R\alpha_1'}$
$[-V_1]_{-V_1} = -\frac{C_5}{C_7}\frac{1}{1-z^{-1}}$	$[-V_1]_{-V_1} = -\frac{1}{s_0R\alpha_1'}\frac{R}{R_i} = -\frac{1}{s_0R_i\alpha_1'}$	$\frac{C_5}{C_7} = \frac{1}{s_0R_i\alpha_1'}$
$[-RI_2']_{-V_1} = \frac{C_8}{C_{10}}\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$	$[-RI_2']_{-V_1} = \frac{R}{s_0L_2}\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$	$\frac{C_8}{C_{10}} = \frac{R}{s_0L_2}$
$[-RI_2']_{V_3} = \frac{C_9}{C_{10}}\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$	$[-RI_2']_{V_3} = \frac{R}{s_0L_2}\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$	$\frac{C_9}{C_{10}} = \frac{R}{s_0L_2}$
$[V_3]_{-RI_2'} = -\frac{C_{11}}{C_{13}}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}$	$[V_3]_{-RI_2'} = -\frac{R}{R_L}\cdot\frac{1}{s_0RC_3}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{C_{11}}{C_{13}} = \frac{1}{s_0R_L\alpha_3'}$
$[V_3]_{V_3} = -\frac{C_{12}}{C_{13}}\frac{1}{1-z^{-1}}$	$[V_3]_{V_3} = -\frac{R}{R_L}\cdot\frac{1}{s_0RC_3}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{C_{12}}{C_{13}} = \frac{1}{s_0R_L\alpha_3'}$

För återkopplingarna gäller att:

$[-V_1]_{V_3} = -\frac{C_{14}}{C_7}$	$[-V_1]_{V_3} = -\frac{C_2}{\alpha_1'}$	$\frac{C_{14}}{C_7} = \frac{C_2}{\alpha_1'}$
$[V_3]_{-V_1} = -\frac{C_{15}}{C_{13}}$	$[V_3]_{-V_1} = -\frac{C_2}{\alpha_3'}$	$\frac{C_{15}}{C_{13}} = \frac{C_2}{\alpha_3'}$

Dessutom kan antas att $R_i = R_L = R$





Multiplikation av RI_0 med $z^{-1/2}$ ger RI_0z vilket också innebär en fasförskjutning med -180 grader, vilket ger att alla noder i filtret byter tecken.

Vidare gäller att

$$s_0 = \frac{\omega_c}{2\sin(\Omega_c/2)} \text{ och } C_i' = C_i - 1/2s_0R$$

Vilket ger att:

$$\frac{C_4}{C_7} = \frac{C_5}{C_7} = \frac{C_6}{C_7} = \left[\frac{\omega_c R(C_1 + C_2)}{2\sin(\Omega_c/2)} - \frac{R}{2R}\right]^{-1}, \frac{C_{11}}{C_{13}} = \frac{C_{12}}{C_{13}} = \left[\frac{\omega_c R(C_3 + C_2)}{2\sin(\Omega_c/2)} - \frac{R}{2R}\right]^{-1}$$

$$\frac{C_8}{C_{10}} = \frac{C_9}{C_{10}} = \frac{2R\sin(\Omega_c/2)}{\omega_c L_2}$$

$$\frac{C_{14}}{C_{13}} = \frac{C_2}{C_2 + C_1 - \dfrac{\sin(\Omega_c/2)}{R_i\omega_c}} \text{ och } \frac{C_{15}}{C_{13}} = \frac{C_2}{C_2 + C_3 - \dfrac{\sin(\Omega_c/2)}{R_L\omega_c}}$$

Med värden insatta så fås att:

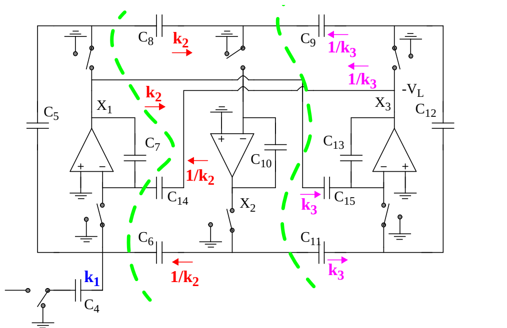
$$\frac{C_4}{C_7} = \frac{C_5}{C_7} = \frac{C_6}{C_7} = \frac{C_{11}}{C_{13}} = \frac{C_{12}}{C_{13}} = \left[\frac{2\pi \cdot 1500 \cdot 1000 \cdot (204.9n + 40.1n)}{2\sin(0.2356/2)} - \frac{1}{2}\right]^{-1} \approx 0.1072$$

$$\frac{C_8}{C_{10}} = \frac{C_9}{C_{10}} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot \sin(0.2356/2)}{3000\pi \cdot 80.3m} \approx 0.3106$$

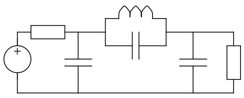
$$\frac{C_{14}}{C_{13}} = \frac{C_{15}}{C_{13}} = \frac{40.1n}{40.1n + 204.9n - \dfrac{\sin(0.2356/2)}{1000 \cdot 3000\pi}} \approx 0.1725$$

Välj till exempel alla "integratorkapacitanser" lika: $C_7 = C_{10} = C_{13} = 47nF$
Ur detta kan alla andra kapacitanser lösas.

Skalning:



Skala filtret så att förhållandet mellan utgångarna på operationsförstärkarna och insignalen är lika med 1. (Om insignalen tillåts pendla mellan maximalt och minimalt tillåtet värde.) Orsaken till skalningen är att hålla nere utsignalnivån på operationsförstärkarna så att dessa inte överstyrs inne i filtret.
Principen för skalning kan beskrivas genom att dela upp näten i delnät till vilka det finns ett antal ingångar och utgångar. Om en ingång skalas med en faktor k_i så kommer alla utgångar att skalas med en faktor $1/k_i$ och alla noder inuti filtret kommer att skalas med en faktor k_i. Detta kommer att ge att signalen efter den första noden är skalad till $k_1 X_1$, den andra $k_2 k_1 X_2$ och slutligen den tredje (utsignalen) till $k_3 k_2 k_1 X_3$.



Uppgift2.10

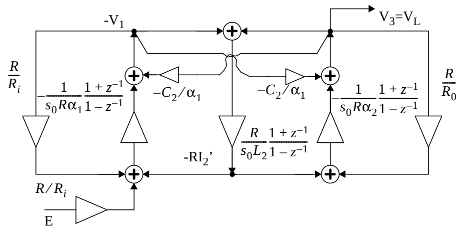
Elliptiskt filter.
Filtrets ordning $N = 3$. Cut-off-vinkeln är $60°$.
Bilinjär transformation.

$C_{1n} = C_{3n} = 0.989727$ $L_{2n} = 1.086872$

$C_{2n} = 0.052941$ $A_{max} = 0.0988$ dB,

$A_{min} = 40.8$ dB, $\Omega_s = 3.6279553$

På samma sätt som för förra uppgiften så fås ett flödesschema enligt:



Där $\alpha_1 = C_1 + C_2$ och $\alpha_2 = C_2 + C_3$.

I ett antal steg kan nätet modifieras (beskrivs i kompendium):

1) Ersätt alla R med

$$R\frac{(1+z^{-1})}{2}$$

2) Utnyttja att:

$$\frac{(1+z^{-1})^2}{2(1-z^{-1})} = \frac{2z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{1-z^{-1}}{2} \text{ och } \frac{1+z^{-1}}{2} = 1 - \frac{1-z^{-1}}{2}$$

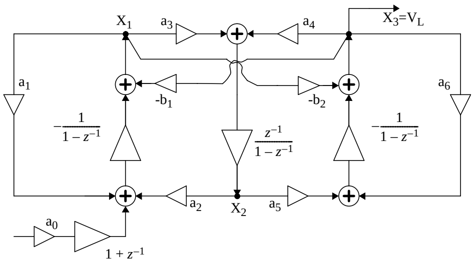
3) Slå ihop konstanttermer och eliminera slingor som tar ut varandra.
4) Sätt alla integratorer ensamma (utan koefficienter) – skriv koefficienter i andra grenar.
5) Ersätt slutligen med SC-integratorer

Lämplig struktur på flödesschema hittas i formelsamling sidan 105. Enligt formelsamling är:

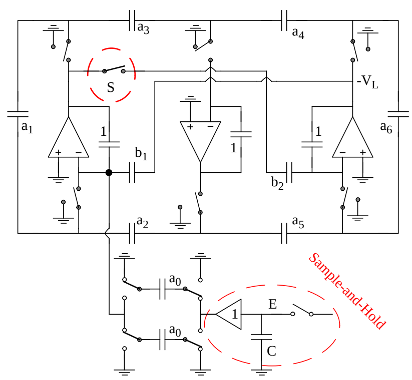
$$a_0 = \frac{k_1}{R\alpha + R/L_2 - 1},\ a_1 = \frac{2}{R\alpha + R/L_2 - 1},\ a_2 = \frac{2}{(R\alpha + R/L_2 - 1)k_2},\ a_3 = \frac{2Rk_2}{L_2},$$

$$a_4 = \frac{2R}{L_2 k_3},\ a_5 = \frac{2k_3}{R\alpha + R/L_2 - 1},\ a_6 = \frac{2}{R\alpha + R/L_2 - 1},$$

$$b_1 = \frac{RC_2 + R/L_2}{(R\alpha + R/L_2 - 1)k_2 k_3},\ b_2 = \frac{(RC_2 + R/L_2)k_2 k_3}{R\alpha + R/L_2 - 1} \text{ och } C_1 = C_3,\ \alpha = C_1 + C_2$$



Realisering med SC-integratorer.



Switchen S används för att förhindra att mellanresultat släpps ut från Knobs integrator. Insignalen samplas.

Integrationskondensatorerna är normerade till 1.
De normerade resistansvärdena är $R = R_i = R_L = 1$. De övriga komponentvärdena beräknas enligt:

$$L_2 = \frac{L_{2n}}{\tan(\Omega_{cut}/2)} \text{ och } C_i = \frac{C_{in}}{\tan(\Omega_{cut}/2)}$$

Komponentvärdena kan beräknas enligt tabellen och formlerna ovan (sätt för tillfället alla skalningsparametrar lika med 1, $k_i = 1$).

$a_0 \approx 0.7479$

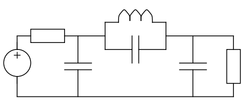
$a_1 = a_6 = a_2 = a_5 \approx 1.4957$

$a_3 = a_4 \approx 1.0624$

$b_1 = b_2 \approx 0.4658$

Uppgift 2.11

Ett tredje ordningens parasitokänsligt LP-filter. Elliptiskt referensfilter. (Det samma som i uppgift 2.10). Cut-off-vinkeln är dock i detta fall lika med $36°$.



På samma sätt som ovan kan termerna bestämmas och man får då:

$a_0 \approx 0.3987k_1$ $a_1 \approx 0.7975$ $a_2 \approx 0.7975/k_2$ $a_3 \approx 0.5979k_2$

$a_4 \approx 0.5979/k_3$ $a_5 \approx 0.7975k_3$ $a_6 \approx 0.7975$ $b_1 \approx 0.1842/k_2k_3$

$b_2 \approx 0.1842k_2k_3$

Enligt uppgift 2.5 var de maximala amplituderna i X_1, X_2 och X_3 givna av

$$\left|\frac{X_1}{E}\right| = 0.73558405,\ \left|\frac{X_2}{E}\right| = 0.80858865,\ \left|\frac{X_3}{E}\right| = 0.5$$

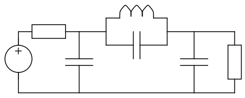
Önskvärt vid skalningen är att de maximala amplitudförhållandena skall vara lika med 1. Med hjälp av skalningsresultaten i uppgift 2.7 så inses att:

$$k_1|X_1/E| = 1 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{0.73558405} \approx 1.35946$$

$$k_1 k_2|X_2/E| = 1 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{0.80858865k_1} \approx 0.90971$$

$$k_1 k_2 k_3|X_3/E| = 1 \Rightarrow k_3 = \frac{1}{0.5k_2 k_1} \approx 1.61718$$

Uppgift 2.9

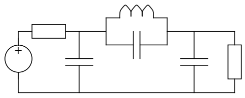


Fjärde ordningens lågpassfilter. Elliptiskt referensfilter.

$f_c = 3.4kHz$, $A_{max} = 0.02$ dB,

$f_{sample} = 128kHz$,

Uppgift 2.8



På grund av att $R = R_i = R_L$ så kan inses att DC-förstärkningen är lika med $1/2$. Man kan också se på nätets struktur (jämför uppgift 2.7) att det realiserar ett tredje ordningens elliptiskt LP-filter.
Man kan anta att maximala värdet för utsignalen antas vid likström. Detta ger att vi direkt kan välja skalningsparametern k_1 på ett sådant sätt att alla noder i nätet blir dubbelt så stora, dvs $k_1 = 2$.