Fullständig lösning till exemplet på föreläsning 3. (Se HO5)

En theveninekvivalent till en enport utgörs av en ideal spänningskälla i serie med en resistans. Spänningskällans spänning ska vara lika med enportens **tomgångsspänning** och dess resistans lika med enportens **inre resistans**.

Den inre resistansen beräknas, åtminstone för en lite mer komplex krets, enklast som kvoten mellan tomgångsspänning och kortslutningsström. Innan vi påbörjar beräkning av tomgångsspänning och kortslutningsström förenklar vi nätet enligt följande:

- En resistans och/eller en ideal spänningskälla i serie med en ideal strömkälla elimineras, så att endast strömkällan blir kvar i grenen. Se figur 1.31 i läroboken. (Resistansen eller spänningskällan påverkar inte strömmen i grenen.)

- En resistans och/eller en ideal strömkälla parallellt med en ideal spänningskälla elimineras, så att endast spänningskällan blir kvar i grenen. Se figur 1.31 i läroboken. (Resistansen eller strömkällan påverkar inte spänningen över grenen.)

- Två eller fler seriekopplade (parallellkopplade) resistanser ersätts med en ersättningsresistans.

Eftersom vi väljer att använda nodanalys för att beräkna tomgångsspänning och kortslutningsström görs också följande förändring i kretsen:

- Ensamma spänningskällor elimineras genom att de skjuts framåt (eller bakåt) in i övriga grenar som ansluter till aktuell nod.

Ovanstående förenklingar av kretsen har gjorts i översta figuren på HO6. I den nedre figuren på HO6 har ytterligare förenklingar genomförts. Dels erhölls åter en spänningskälla i serie med en strömkälla sedan den ensamma spänningskällan eliminerats. Denna spänningskällan kan då elimineras enligt ovan. Dels erhölls även ett par seriekopplade resistanser vilka ersatts med en ersättningsresistans enligt ovan.

I den övre kretsen på HO6 finns också två seriekopplade spänningskällor i två olika grenar. Seriekopplade ideala spänningskällor kan slås samman till en spänningskälla genom att addera/subtrahera deras spänningsvärden till varandra (med hänsyn taget till riktning). [Om parallellkopplade ideala strömkällor förekommer kan dessa ersättas med en ideal strömkälla genom addition/subtraktion av deras strömvärden (med hänsyn taget till riktning). Detta är inte aktuellt i det här exemplet.]

Det "ytterligare förenklade nätet" nederst på HO6 utgör startpunkten för den egentliga nodanalysen, som alltså går ut på att beräkna tomgångsspänningen U_0 samt kortslutningsströmmen I_k. Först och främst måste vi definiera U_0 och I_k, så att vi vet vad vi ska beräkna. Detta görs i figurerna på HO7.

Nedan följer några mycket viktiga kommentarer angående definition av tomgångsspänning och kortslutningsström.

- Observera att det behövs *en figur* för att definiera tomgångsspänningen och *en annan figur* för att definiera kortslutningsströmmen. Samma figur kan *inte* användas eftersom det är avbrott mellan A och B vid beräkning av tomgångsspänningen, medan A och B är kortslutna vid beräkning av kortslutningsströmmen.

- En spänning definieras genom att den ges ett namn (U_0 t.ex.) och en **referensriktning**. I figuren på HO7 har vi antagit + i nod A och - i nod B. Dvs. vi har antagit att potentialen är högre i A än i B. Om detta verklligen är fallet vet vi inte, men vi måste anta någonting. Om vårt antagande inte stämmer med verkligheten visar sig detta genom att vi får ett negativt U_0 när beräkningen är klar, men detta är helt i sin ordning. Spänningar kan vara såväl positiva som negativa.

  På samma sätt definieras en ström genom att den ges ett namn (I_k t.ex.) och en **referensriktning**. I figuren på HO7 har vi antagit att kortslutningsströmmen går från nod A mot nod B. Om vårt antagande inte stämmer med verkligheten visar sig detta genom att vi får ett negativt I_k när beräkningen är klar, men detta är helt i sin ordning. Även strömmar kan vara såväl positiva som negativa.

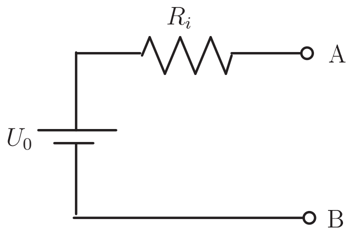
- I och med att U_0 definierats med + i nod A och - i nod B och I_k definierats med riktning från A mot B har U_0 och I_k getts *samhörande* referensriktningar. Om potentialen är högre i A än i B vid tomgång (avbrott mellan A och B), så kommer nämligen strömmen vid kortslutning av A och B att gå från A till B. Ström flyter nämligen enligt definition från högre mot lägre potential. (Vid kortslutningen mellan A och B blir dessa båda noder en och samma nod där naturligtvis en och samma potential råder, men det är en annan sak.)

- Man måste inte anta samhörande referensriktningar på U_0 och I_k. Man kan t.ex. definera U_0 med + i nod A och - i nod B medan I_k definierats med riktning från B mot A. U_0 och I_k har då getts *ej samhörande* referensriktningar.

- Om *samhörande* referensriktningar valts på U_0 och I_k beräknas kretsens inre resistans R_i som: $R_i = \dfrac{U_0}{I_k}$.

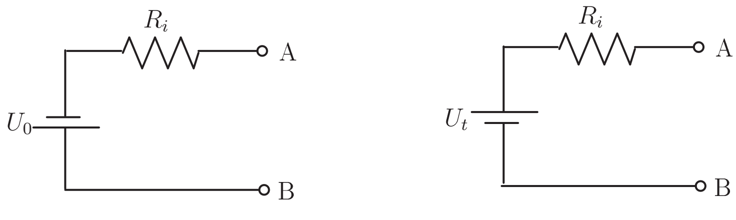
  Om *ej samhörande* referensriktningar valts på U_0 och I_k beräknas kretsens inre resistans R_i som: $R_i = -\dfrac{U_0}{I_k}$.

- Om U_0 definierats med + i nod A och - i nod B får den ekvivalenta enporten (theveninekvivalenten) följande utseende (eventuellt är U_0 negativ)



  Observera att spänningskällan i theveninekvivalenten här ska ha pluspolen mot A.

- Om U_0 i stället definierats med + i nod B och med - i nod A får den ekvivalenta enporten (theveninekvivalenten) följande utseende (eventuellt är U_0 negativ):



a) b)

  Spänningskällan i theveninekvivalenten ska i detta fall ha pluspolen mot B (figur a)).

  Man kan också använda samma figur här, dvs. med pluspolen mot A, varvid emellertid spänningskällans spänning blir en annan. Om denna spänning döps till U_t blir $U_t = -U_0$ (figur b)). (Kan kännas som ett naturligt alternativ om U_0 blir negativ.)

- Observera att A och B måste anges i theveninekvivalenten för att svaret ska vara entydigt. (Vidare måste beräknade värden på U_0 och R_i anges för att svaret ska vara fullständigt.)

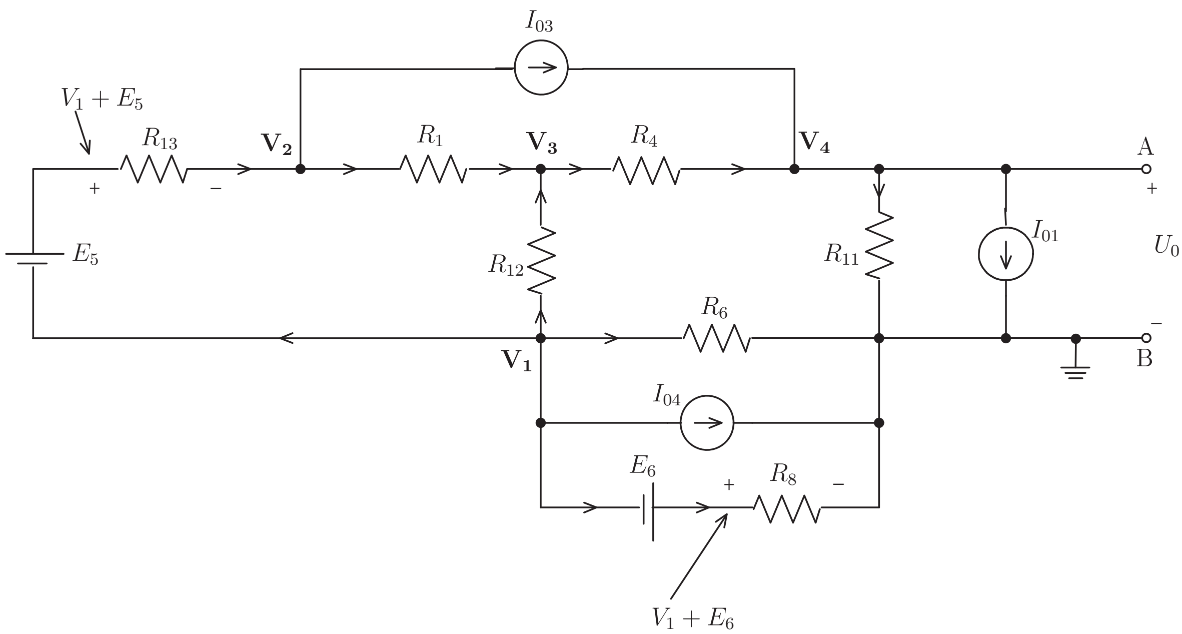
Beräkning av tomgångsspänningen U_0:

Nodanalys ska användas.

- Den första punkten vid nodanalys (eliminering av ensamma spänningskällor) har redan genomförts i figuren överst på HO7, där även tomgångsspänningen definierats.

- Nästa punkt vid nodanalysen: **Jorda en nod samt inför nodpotentialer i övriga noder.** Detta har gjorts i nedanstående figur, där även strömriktningar angetts i samtliga grenar.

  För enkelhets skull har nod B jordats. U_0 blir då $U_0 = V_A - V_B = V_4 - 0 = V_4$ eftersom potentialen i nod A är V_4 och jordpotentialen definitionsmässigt är noll.



Observera att en nod definieras av att flera olika grenar möts där. (De svarta punkterna i figuren anger att kontakt råder, men varje punkt svarar inte direkt mot en separat nod. Vissa svarta punkter sammanbinds av räta linjer, som svarar mot resistansfria ledningar, och bildar då tillsammans en nod.)

- KCL används nu för att ställa upp en ekvation för var och en av noderna med potentialerna V_1, V_2, V_3 och V_4. Ingen ekvation ställs upp för den jordade noden. (Nodnumreringen anges av indexeringen av nodpotentialerna.)

  Vi börjar med att använda KCL på nod 1. Fem olika strömmar ansluter till nod 1, nämligen strömmarna genom R_{12}, R_6, I_{04}, E_6/R_8 och E_5/R_{13}. Samtliga dessa strömmars referensriktningar är *ut från* nod 1. Med konventionen att strömmar in mot en nod summeras med +tecken och strömmar ut från en nod med -tecken erhålls följande ekvation för nod 1:

  $$-\frac{V_1 - V_3}{R_{12}} - \frac{V_1 - 0}{R_6} - I_{04} - \frac{V_1 + E_6 - 0}{R_8} - \frac{V_1 + E_5 - V_2}{R_{13}} = 0$$

  De olika strömmarna tecknas genom att tillämpa Ohms lag ($I = U/R$) på resistansen i respektive gren. Formen $I = U/R$ på Ohms lag förutsätter att vi har samhörande referensriktningar på spänning och ström. Eftersom ström flyter från högre mot lägre potential innebär detta att spänningen U över resistansen bestäms som "den högre potentialen minus den lägre potentialen". För t.ex. resistansen R_{13}, där strömmen definierats från vänster till höger, blir den högre potentialen lika med potentialen direkt till vänster om R_{13}. Denna potential kan tecknas som $V_1 + E_5$. Potentialen nedanför E_5 är nämligen V_1 varvid potentialen ovanför E_5 blir $V_1 + E_5$, eftersom denna spänningskälla har pluspolen uppåt. (Potentialen på ovansidan av E_5 är E_5 högre än potentialen nedanför E_5.)

  På samma sätt gäller för resistansen R_8 att den högre potentialen, som är den potential som är till vänster om R_8, blir $V_1 + E_8$ medan den lägre potentialen (till höger om R_8) blir noll eftersom R_8 är kopplad till nod B som är jordad.

  Betrakta nu nod 2. KCL ger:

  $$\frac{V_1 + E_5 - V_2}{R_{13}} - \frac{V_2 - V_3}{R_1} - I_{03} = 0$$

  Observera att den första termen i ekvationen för nod 2 har samma utseende som den sista termen i ekvationen för nod 1. Detta beror förstås på att det är samma ström som går ut från nod 1 genom grenen E_5/R_{13} och som sedan kommer in mot nod 2. I ekvationen för nod 2 summeras denna ström med +tecken eftersom den går in mot nod 2.

  För nod 3 och nod 4 ger KCL på samma sätt följande ekvationer:

Nod 3: $\dfrac{V_2 - V_3}{R_1} + \dfrac{V_1 - V_3}{R_{12}} - \dfrac{V_3 - V_4}{R_4} = 0$

Nod 4: $\dfrac{V_3 - V_4}{R_4} - \dfrac{V_4 - 0}{R_{11}} - I_{01} + I_{03} = 0$

Följande ekvationssystem har således erhållits:

Nod 1: $-\dfrac{V_1 - V_3}{R_{12}} - \dfrac{V_1 - 0}{R_6} - I_{04} - \dfrac{V_1 + E_6 - 0}{R_8} - \dfrac{V_1 + E_5 - V_2}{R_{13}} = 0$

Nod 2: $\dfrac{V_1 + E_5 - V_2}{R_{13}} - \dfrac{V_2 - V_3}{R_1} - I_{03} = 0$

Nod 3: $\dfrac{V_2 - V_3}{R_1} + \dfrac{V_1 - V_3}{R_{12}} - \dfrac{V_3 - V_4}{R_4} = 0$

Nod 4: $\dfrac{V_3 - V_4}{R_4} - \dfrac{V_4 - 0}{R_{11}} - I_{01} + I_{03} = 0$

För att lösa detta ekvationssystem så separerar vi till en början de olika uttrycken i resp. ekvation termvis, vilket ger:

$$-\frac{V_1}{R_{12}} + \frac{V_3}{R_{12}} - \frac{V_1}{R_6} - I_{04} - \frac{V_1}{R_8} - \frac{E_6}{R_8} - \frac{V_1}{R_{13}} - \frac{E_5}{R_{13}} + \frac{V_2}{R_{13}} = 0$$

$$\frac{V_1}{R_{13}} + \frac{E_5}{R_{13}} - \frac{V_2}{R_{13}} - \frac{V_2}{R_1} + \frac{V_3}{R_1} - I_{03} = 0$$

$$\frac{V_2}{R_1} - \frac{V_3}{R_1} + \frac{V_1}{R_{12}} - \frac{V_3}{R_{12}} - \frac{V_3}{R_4} + \frac{V_4}{R_4} = 0$$

$$\frac{V_3}{R_4} - \frac{V_4}{R_4} - \frac{V_4}{R_{11}} - I_{01} + I_{03} = 0$$

Nästa omskrivning innebär att vi samlar ihop samtliga V_1-termer för sig, V_2 termer för sig etc. samt flyttar över samtliga konstanta termer till höger led. Vi byter sedan tecken på samtliga termer för att få samma form på ekvationerna som den formella metodiken (se sid. 53-55 i läroboken) ger. Vi får således:

$$\begin{array}{ccccccccc}
G_{11}V_1 & + & G_{12}V_2 & + & G_{13}V_3 & + & G_{14}V_4 & = & -\frac{E_5}{R_{13}} - \frac{E_6}{R_8} - I_{04} \\
G_{21}V_1 & + & G_{22}V_2 & + & G_{23}V_3 & + & G_{24}V_4 & = & \frac{E_5}{R_{13}} - I_{03} \\
G_{31}V_1 & + & G_{32}V_2 & + & G_{33}V_3 & + & G_{34}V_4 & = & 0 \\
G_{41}V_1 & + & G_{42}V_2 & + & G_{43}V_3 & + & G_{44}V_4 & = & -I_{01} + I_{03}
\end{array}$$

där

$$\begin{array}{llll}
G_{11} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{13}} & G_{12} = -\frac{1}{R_{13}} & G_{13} = -\frac{1}{R_{12}} & G_{14} = 0 \\
G_{21} = -\frac{1}{R_{13}} & G_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{13}} & G_{23} = -\frac{1}{R_1} & G_{24} = 0 \\
G_{31} = -\frac{1}{R_{12}} & G_{32} = -\frac{1}{R_1} & G_{33} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{12}} & G_{34} = -\frac{1}{R_4} \\
G_{41} = 0 & G_{42} = 0 & G_{43} = -\frac{1}{R_4} & G_{44} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{11}}
\end{array}$$

Vi kan här observera symmetrin i ekvationssystemet, dvs. $G_{21} = G_{12}$, $G_{31} = G_{13}$ osv.

Insättning av numeriska värden ger:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3.5V_1 & - & 0.5V_2 & - & V_3 & - & 0 \cdot V_4 & = & -8.5 \\ -0.5V_1 & + & V_2 & - & 0.5V_3 & - & 0 \cdot V_4 & = & -2.5 \\ -V_1 & - & 0.5V_2 & + & 2V_3 & - & 0.5V_4 & = & 0 \\ -0 \cdot V_1 & - & 0 \cdot V_2 & - & 0.5V_3 & + & 1.5V_4 & = & -1 \end{array}$$

Lösning av detta ekvationssystem ger:

$$V_1 \approx -4.8605 \text{ [V]}; V_2 \approx -7.3488 \text{ [V]}; V_3 \approx -4.8372 \text{ [V]}; V_4 \approx -2.2791 \text{ [V]}$$

Ekvationssystemet löser man enklast genom att använda MATLAB. Koefficienterna i vänster led skrivs in som en matris A i MATLAB medan koefficienterna i höger led skrivs in som en matris B. Observera att matriserna inleds med [och avslutas med]. Koefficienterna i respektive rad åtskiljs med mellanslag och raderna åtskiljs med semikolon;. Genom att sätta semikolon efter en viss kommandorad visar inte MATLAB resultatet av den operation som utförts i och med att RETURN trycks. (Se kurshemsidan där en minimanual för MATLAB återfinns liksom en utförligare beskrivning av hur ekvationssystem löses med MATLAB.)

MATLAB-lösning av ovanstående ekvationssystem:

```
A=[3.5 -0.5 -1 0;-0.5 1 -0.5 0;-1 -0.5 2 -0.5;0 0 -0.5 1.5];
B=[-8.5;-2.5;0;-1];
V=A\B
```

$V_1 \approx -4.8605$
$V_2 \approx -7.3488$
$V_3 \approx -4.8372$
$V_4 \approx -2.2791$

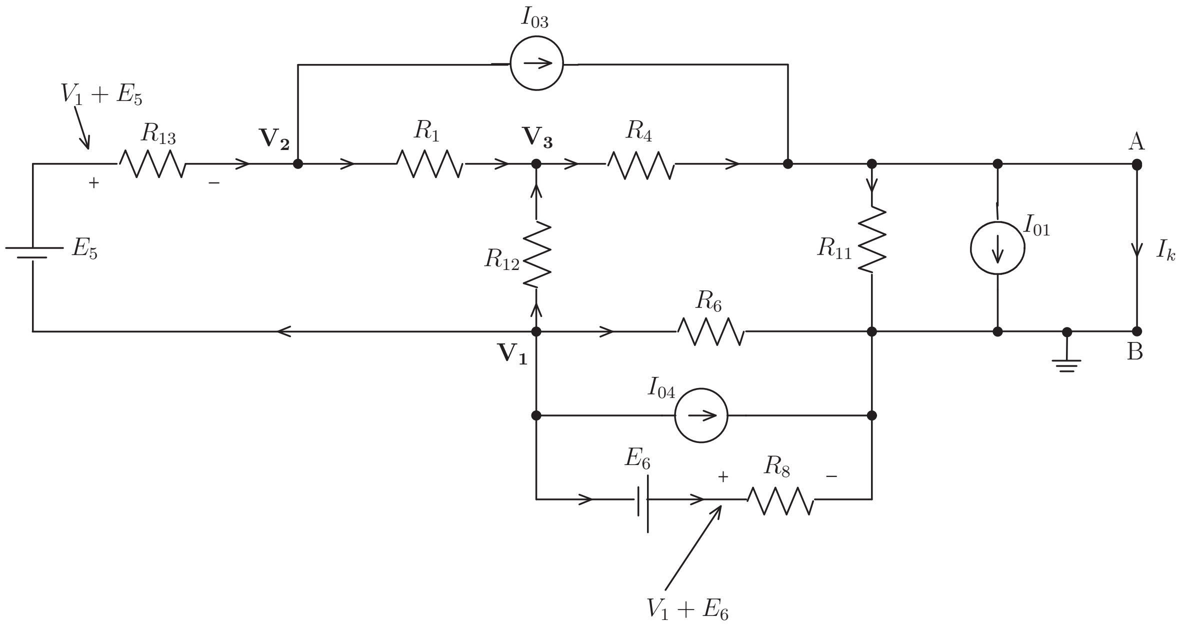
”A backslash B” ger således lösningen till ekvationssystemet och eftersom inget semikolon avslutar den kommandoraden skriver MATLAB ut resultatet.

Som vi tidigare konstaterat gäller att $U_0 = V_4$.
Tomgångsspänningen blir således $U_0 \approx -2.2791$ V.
Enheten för U_0 blir volt [V] eftersom spänningsvärden satts in i volt [V], strömvärden i milliampere [mA] och resistansvärden i kiloohm [kΩ].

Beräkning av kortslutningsströmmen I_k:

Nodanalys ska användas även vid denna beräkning.

- I figuren nederst på HO7 har kortslutningsströmmen definierats.
- Nodanalysen genomförs därefter på samma sätt som vid beräkning av tomgångsspänningen.
  Observera att nod A och nod B nu utgör samma nod elektriskt sett eftersom de kortslutits. Detta innebär att någon nodpotential V_4 inte är aktuell i detta fall, eftersom potentialen i denna nod är noll.



För nod 1 och nod 2 erhålls exakt samma ekvationer som vid beräkning av tomgångsspänningen, medan ekvationen för nod 3 ändras något.

Nod 3: $\dfrac{V_2 - V_3}{R_1} + \dfrac{V_1 - V_3}{R_{12}} - \dfrac{V_3 - 0}{R_4} = 0$

dvs. $G_{34} = 0$ i detta fall.
Eftersom nod4 försvunnit erhålls således följande ekvationssystem (med insatta numeriska värden) här:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3.5V_1 & - & 0.5V_2 & - & V_3 & = & -8.5 \\ -0.5V_1 & + & V_2 & - & 0.5V_3 & = & -2.5 \\ -V_1 & - & 0.5V_2 & + & 2V_3 & = & 0 \end{array}$$

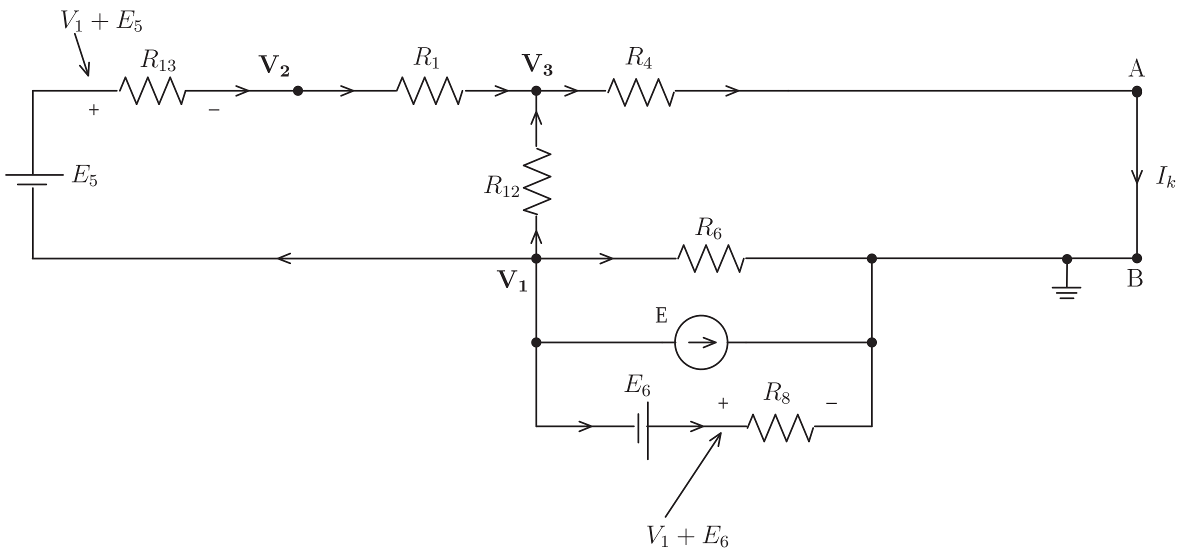
Lösning av detta ekvationssystem ger:

$V_1 \approx -4.5152$ [V]; $V_2 \approx -6.7273$ [V]; $V_3 \approx -3.9394$ [V]

- Beräkning av kortslutnigsströmmen I_k är inte helt trivialt i detta exempel, huvudsakligen beroende på att vi har en ideal strömkälla parallellt med själva kortslutningen. Emellertid kan KCL tillämpas på A enligt följande:

$$\frac{V_3 - 0}{R_4} + I_{03} - I_{01} - I_k = 0 \Rightarrow I_k = \frac{V_3}{R_4} + I_{03} - I_{01} \approx -2.9697 \text{ mA}$$

Att detta är korrekt kan inses genom följande resonemang. Till att börja med kan vi konstatera att strömmen genom R_{11} är noll, eftersom potentialen $V_A = V_B = 0$, dvs. potentialen är noll såväl ovanför som nedanför R_{11}. Potentialdifferensen är således noll och Ohms lag ger då strömmen noll.
R_{11} kan därmed tas bort, dvs. ersättas med ett avbrott.
Om vi därefter för ett ögonblick tänker oss att strömkällorna I_{03} och I_{01} inte hade funnits med i kretsen från början, så skulle vi haft följande situation:



I denna krets är uppenbart kortslutningsströmmen I_k lika med strömmen genom R_4, dvs. $I_k = \dfrac{V_3 - 0}{R_4}$.
Men eftersom vi i själva verket har en strömkälla som matar in strömmen I_{03} mot A och en strömkälla som tar bort strömmen I_{01} från A, så blir vår kortslutningsström därmed

$$I_k = \frac{V_3}{R_4} + I_{03} - I_{01}$$

Observera att strömkällan I_{01} endast inverkar på kortslutningsströmmens storlek nu när A och B är kortslutna, och inte på någon annan ström eller spänning. Strömmen I_{01} går från strömkällan in mot B, därefter ut från B och in mot A och sedan ut från A tillbaka till strömkällan.

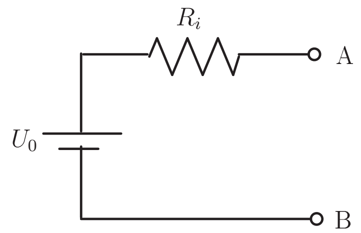
Någon kanske invänder, att det är konstigt att det över huvud taget kan gå ström från A till B eftersom det är samma potential i de båda punkterna, men det beror förstås på att resistansen är noll i den ”ledning” som kopplar ihop A och B, och därmed är inte Ohms lag tillämplig på den ”ledningen”. I en ledning med resistansen noll bestäms strömmen helt och hållet av övriga nätelement i kretsen.

- **Beräkning av inre resistansen:**

  Eftersom vi valt *samhörande referensriktningar* på tomgångsspänning och kortslutningsström så beräknas intre resistansen R_i som

  $$R_i = \frac{U_0}{I_k} \approx \frac{-2,2791}{-2.9697 \cdot 10^{-3}} \approx 0.76745 \text{ k}\Omega$$

- **Svar:** Följande Theveninekvivalent har bestämts till den givna kretsen:



$U_0 \approx -2.28$ V $\quad R_i \approx 0.767$ kΩ

Kommentar: Observera att svaret ska innehålla en komplett figur, där bl.a. A och B finns med. A och B utgör de referenspunkter som kopplar svaret till den givna kretsen. För att svaret ska vara fullständigt ska också de beräknade värdena på U_0 och R_i anges. Svaret ges med tre värdesiffror.