Löpande exempel

Låt $x = (x_2, x_1, x_0)$ representerar tal där x_2 är msb. Realisera funktionen som returnerar 1 för de 3 minsta talen.

Funktionstabell

x	$x_2 x_1 x_0$	f
0	0 0 0	1
1	0 0 1	1
2	0 1 0	1
3	0 1 1	0
4	1 0 0	0
5	1 0 1	0
6	1 1 0	0
7	1 1 1	0

Grundformer för Booleska funktioner

Def Summa av produkter (SP-form)

$$f = x_2' x_1' + x_2' x_0'$$

Def Produkt av summor (PS-form)

$$f = x_2' (x_1' + x_0')$$

Min- och max-termer

i	$x_2\ x_1\ x_0$	$m_0 = x_2'x_1'x_0'$	$m_1 = x_2'x_1'x_0$	$M_0 =$ $x_2+x_1+x_0$	$M_1 =$ $x_2+x_1+x_0'$
0	0 0 0	1	0	0	1
1	0 0 1	0	1	1	0
2	0 1 0	0	0	1	1
3	0 1 1	0	0	1	1
4	1 0 0	0	0	1	1
5	1 0 1	0	0	1	1
6	1 1 0	0	0	1	1
7	1 1 1	0	0	1	1

Def: Till varje insignalkombination i definieras en

- **minterm** m_i som blir 1 endast för insignalkomb i.
- **maxterm** M_i som blir 0 —— " ——

$$M_0 = m_0' = (x_2'x_1'x_0')' = \underline{x_2 + x_1 + x_0}$$

$$M_i = m_i'$$

Normalformer

Def: SP-normalform är SP-form med mintermer.

Ex $f = m_0 + m_1 + m_2 = x_2'x_1'x_0' + x_2'x_1'x_0 + x_2'x_1x_0'$

Förenklat skrivsätt $f = \sum(0,1,2)$

$f=1$ för dessa värden på x

Def: PS-normalform är en PS-form med maxtermer.

Ex $f = M_3 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_6 \cdot M_7 = \ldots$

Förenklat skrivsätt $f = \prod(3,4,5,6,7)$

$f=0$ för dessa värden

Kommentarer

- Normalformerna är entydiga och enkla att teckna.
- Blir stora uttryck och grindnät.

Förenkling av Booleska funktioner

$a = a + a$

$$f = \underbrace{x_2'x_1'x_0'}_{=0} + \underbrace{x_2'x_1'x_0}_{=1} + \underbrace{x_2'x_1x_0'}_{=2} + \underbrace{x_2'x_1'x_0'}_{=0}$$

är lika i alla utom en variabel

$$= \underbrace{x_2'x_1'(\overbrace{x_0' + x_0}^{=1})}_{0 \text{ och } 1} + \underbrace{x_2'x_0'(\overbrace{x_1 + x_1'}^{=1})}_{0 \text{ och } 2} =$$

$$= x_2'x_1' + x_2'x_0'$$

Grafisk metod: Karnaughdiagram

f

x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
0	1^{0}	1^{1}	0^{3}	1^{2}
1	0^{4}	0^{5}	0^{7}	0^{6}

$x_2'x_1'$ $\quad$ $x_2'x_0'$

K-diagram = omorganiserad funktionstabell

$$f = x_2'x_1' + x_2'x_0'$$

Metod

- Ringa in alla 1:or (inga 0:or)
- Få ringar, stora ringar ger stora förenklingar
- Giltiga sammanslagningar har formen $2^i \cdot 2^j$ rutor för $i, j \in \{0,1,2\}$ (upp till 4 variabler)

Ex K-diagram med 4 variabler

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

x_2x_1'

x_3

$x_1'x_0'$

$$g(x_3,x_2,x_1,x_0) = x_1'x_0' + x_2x_1' + x_3$$

- Fel: ej största möjliga inringning

	00
00	1

$\underline{x_3'x_2'x_1'x_0'}$ är mer komplext än $x_1'x_0'$

- Fel: fel storlek

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00				
01	1	1		
11	1	1		
10	1	1		

$(x_3+x_2)x_1' =$

$\underline{x_3x_1'} + \underline{x_2x_1'}$

Motsvarar ej <u>en</u> produkt!

Def En produktterm hörande till en maximal inringning kallas en **primimplikator**.

Ex $x_1'x_0'$ är en primimplikator

$x_3'x_2'x_1'x_0'$ är ej en primimplikator.

Ex Bestäm en minimal SP-form till

$$g(x_3,x_2,x_1,x_0)=\sum(2,3,7,8,10,12,15)$$

$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00	0 (0)	0 (1)	1 (3)	1 (2)
01	0 (4)	0 (5)	1 (7)	0 (6)
11	1 (12)	0 (13)	1 (15)	0 (14)
10	1 (8)	0 (9)	0 (11)	1 (10)

+ ringar eller

+ ringar för att täcka alla 1:or ⇒

Minimal SP-form är ej unik!

Övning att skriva ett uttryck för

$g =$

Minimal PS-form

Minimal PS-form erhålls med samma metod fast applicerad på funktionens invers.

Ex

f

$x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0

f'

$x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	1

$$f' = \underline{x_2 + x_1x_0}$$

$$f = (f')' = (x_2 + x_1x_0)' \overset{\text{deMorgans}}{=}$$

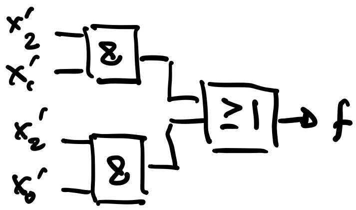
$$= x_2' \cdot (x_1x_0)' = /\text{deMorgans}/ =$$

$$= \underline{x_2' \cdot (x_1' + x_0')} \quad \text{minimal PS-form!}$$

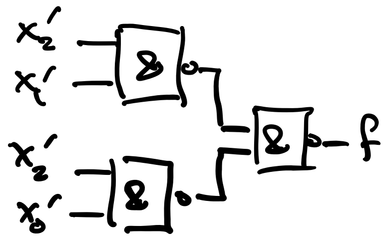
Oftast ringas 0:or i K-diagrammet för f istället.

Grindnätstyper för SP-form

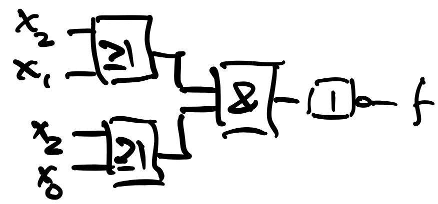
$$f=(x_2'x_1'+x_2'x_0')''=((x_2'x_1')'\cdot(x_2'x_0')')'=((x_2+x_1)\cdot(x_2+x_0))'$$



AND-OR-nät



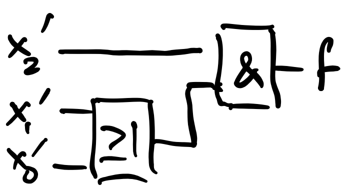
NAND-NAND-nät



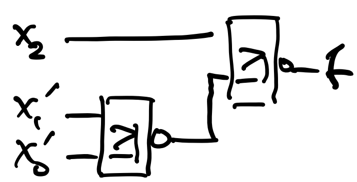
OR-AND-NOT-nät

Grindnätstyper för PS-form

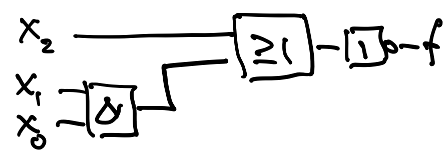
$$f=(x_2'(x_1'+x_0'))''=(x_2+(x_1'+x_0')')'=(x_2+x_1\cdot x_0)'$$



OR-AND-nät



NOR-NOR-nät



AND-OR-NOT-nät

Ofullständigt specificerade funktioner

Ibland används inte alla insignalkombinationer och då kvittar det vilken utsignal det blir för dessa värden.

$\Rightarrow$ Ger designfrihet att minimera kretsen.

Ex Bestäm en minimal SP-form för

$$g(x_3,x_2,x_1,x_0) = \sum(1,3,8,10,12) + \underset{\uparrow}{d}(5,6,7,13,14,15)$$

don't care, g kan var 0 eller 1 för dessa värden.

g

$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	–	–	–
11	1	–	–	–
10	1	0	0	1

$x_3'x_0$

x_3x_0'

"–" don't care

Kan ringas in om ringarna kan göras större, men behöver ej ringas in

$$g = x_3x_0' + x_3'x_0 \quad (= x_3 \oplus x_0) \qquad (*)$$

Observera att uttrycket är enklare än om '–' sätts till 0 och en minimal SP-form beräknats.

Övning: Beräkna g då '–' sätts 0 och jämför med (*).