

Tillståndsmaskiner

Ola Dahl och Mattias Krysanter
 Linköpings tekniska högskola, ISY,
 Datorteknik

2014-05-08

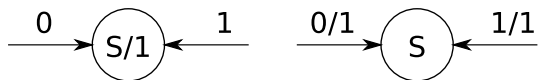
1 Konvertering mellan Mealy och Moore

Mot varje Mealy-graf svarar en Moore-graf och omvänt. Avsnittet beskriver metoder för att konvertera ett tillståndsdiagram från Moore till Mealy-modellen och tvärt om.

1.1 Moore till Mealy

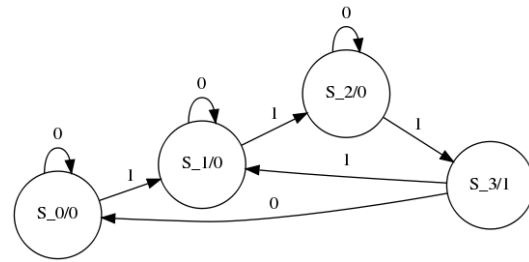
En sekvenskrets av Moore-typ kan konverteras till en motsvarande sekvenskrets av Mealy-typ. Konvertering av ett tillståndsdiagram sker genom att konvertera varje enskild nod var för sig. Figur 1 illustrerar hur en nod konverteras, där den vänstra respektive högra figuren visar noden med ingående bågar före respektive efter konverteringen. Konverteringen sker genom att flytta utsignalen angiven i tillståndet till samtliga inkommande bågar.

Den resulterande Mealy-grafen kan ha fler tillstånd än nödvändigt och tillståndsminimering som beskrivs i avsnitt 2 bör därefter genomföras för att minimera antalet tillstånd.

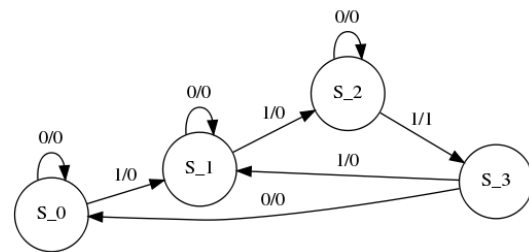


Figur 1: Konvertering från Moore till Mealy.

Exempel 1. I Föreläsning 5 - *Sekvenskretsar* visades för första gången ett tillståndsdiagram av Moore-typ för att detektera var tredje etta. Tillståndsdiagrammet återges i figur 2. Konvertering av grafen i figur 2 till en graf av Mealy-typ ger ett resultat enligt figur 3.

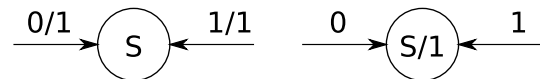


Figur 2: En tillståndsgraf av Moore-typ för att markera var tredje etta i en insignalsekvens.

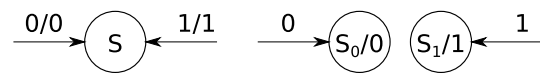


Figur 3: En tillståndsgraf av Mealy-typ för att markera var tredje etta i en insignalsekvens.

1.2 Mealy till Moore



(a) Alla inkommande bågar är associerade med samma utsignal.



(b) Inkommande bågar med olika utsignal.

Figur 4: Konvertering från Mealy till Moore.

En sekvenskrets av Mealy-typ kan konverteras till en motsvarande sekvenskrets av Moore-typ. Konvertering av ett tillståndsdiagram sker genom att konvertera varje enskild nod var för sig. Figur 4 illustrerar en metod för att konvertera en nod. De ingående bågar kan antingen vara associerade med samma utsignal som i figur 4(a) eller med olika utsignaler som i figur 4(b).

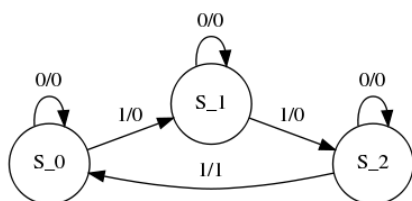
I det först fallet flyttas insignalen från ingående bågar in till tillståndet enligt figur 4(a).

I det andra fallet delas det ursprungliga tillstån-

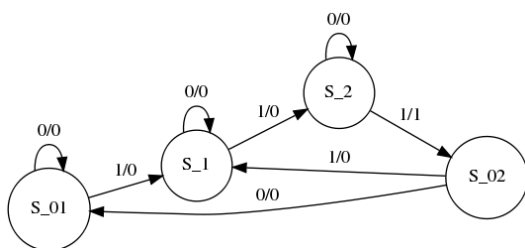
det S upp i två tillstånd $S_0/0$ och $S_1/1$ associerade till de olika utsignalvärdena 0 respektive 1. De ingående bågar till S med utsignalvärde 0 blir ingående bågar till $S_0/0$ och de ingående bågar till S med utsignalvärde 1 blir ingående bågar till $S_1/1$. En utgående båge från S resulterar i utgående bågar både från $S_0/0$ och $S_1/1$.

Exempel 2. Betrakta en sekvenskrets av Mealy-typ för att detektera var tredje etta i en insignalsekvens. Kretsens tillståndsdiagram visades för första gången i Föreläsning 5 - *Sekvenskretsar* och återges även här, i figur 5.

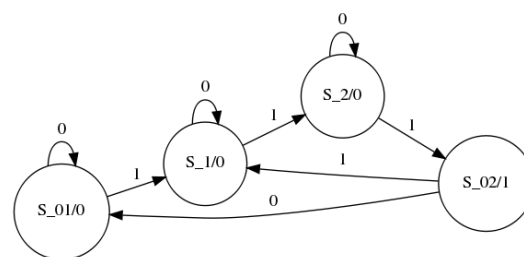
Konvertering av grafen i figur 5 till en graf av Moore-typ ger ett delresultat på Mealy-form enligt figur 6 där tillstånd S_0 har delats upp i tillstånden S_{01} och S_{02} eftersom S_0 både har utsignal 0 och 1 på inkommande bågar. Konvertering av grafen i figur 6 till en graf av Moore-typ ger ett resultat enligt figur 7. Notera att tillståndsdiagrammen i figur 2 och figur 7 är lika så när som på tillståndens namn.



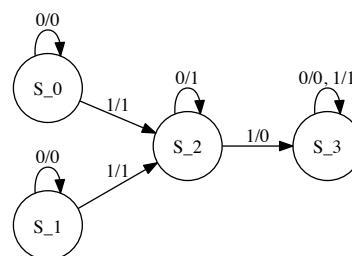
Figur 5: Ett tillståndsdiagram av Mealy-typ för att markera var tredje etta i en insignalsekvens.



Figur 6: En tillståndsgraf av Mealy-typ för att markera var tredje etta i en insignalsekvens, förberedd för konvertering till en graf av Moore-typ genom att ett tillstånd har delats upp i två.



Figur 7: En tillståndsgraf av Moore-typ för att markera var tredje etta i en insignalsekvens.



Figur 8: En tillståndsgraf där tillstånden S_0 och S_1 är ekvivalenta.

2 Tillståndsminimering

Tillståndsminimering kan utföras om en sekvenskrets innehåller ekvivalenta tillstånd.

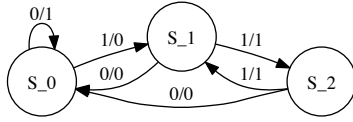
Definition 1. Två tillstånd S_i och S_j i en sekvenskrets är ekvivalenta om och endast om kretsen för en godtycklig insignalsekvens och längd ger ut identiska utsignalsekvenser vid start i S_i respektive S_j .

Exempel 3. I tillståndsdiagrammet i figur 8 är det uppenbart att tillstånd S_0 och S_1 är ekvivalenta.

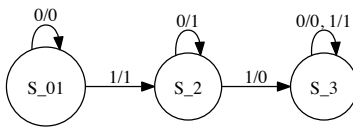
Ibland är det inte lika lätt att se att tillstånd är ekvivalenta och det visar nästa exempel.

Exempel 4. I tillståndsdiagrammet i figur 9 är tillstånden S_1 och S_2 ekvivalenta.

Definition 2. Två sekvenskretsar \mathcal{S} och \mathcal{S}^* är ekvivalent om och endast om det till varje tillstånd i \mathcal{S} finns ett ekvivalent tillstånd i \mathcal{S}^* och omvänt.



Figur 9: En tillståndsgraf där tillstånden S_1 och S_2 är ekvivalenta.

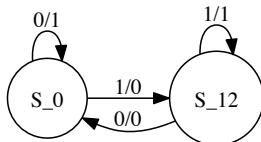


Figur 10: En ekvivalent tillståndsgraf till grafen i figur 8.

Exempel 5. Tillståndsdiagrammet i figur 10 är ekvivalent med tillståndsdiagrammet i figur 8 eftersom S_0 och S_1 är ekvivalenta med S_{01} , S_2 är ekvivalent med S_2 och S_3 med S_3 . Notera att grafen beskriver samma beteende men har färre tillstånd en grafen i figur 8.

Exempel 6. Tillståndsdiagrammet i figur 11 är ekvivalent med tillståndsdiagrammet i figur 9 eftersom S_0 och S_0 är ekvivalenta och S_1 och S_2 är ekvivalent med S_{12} .

Exemplen ovan visar hur antalet tillstånd reduceras genom att ersätta ekvivalenta tillstånd med ett enda tillstånd. För att minimera antalet tillstånd



Figur 11: En ekvivalent tillståndsgraf till grafen i figur 9.

behövs således en metod som beräknar de ekvivalenta tillstånden i en graf och det beskrivs härnäst.

Metoden för att hitta ekvivalenta tillstånd bygger på begreppet k -ekvivalens.

Definition 3. Två tillstånd, här betecknade S_i och S_j , i en sekvenskrets, är k -ekvivalenta om de utsignaler som kretsen ger i k steg efter start i S_i överensstämmer med de utsignaler som nätet ger i k steg efter start i S_j .

Låt $S_i \equiv^k S_j$ beteckna att S_i är k -ekvivalent med S_j och $S_i \equiv S_j$ att S_i är ekvivalent med S_j .

Om $S_i \equiv^k S_j$ för $k = 1$ så betyder det att utsignalerna är desamma till och med det första klockintervall. Om $k = 2$ så är utsignalerna desamma till och med andra klockintervallet. Om $S_i \equiv^k S_j$ då $k \rightarrow \infty$ så är utsignalerna desamma för alltid och detta medför att S_i och S_j är ekvivalenta, dvs

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (S_i \equiv^k S_j) \Leftrightarrow S_i \equiv S_j$$

2.1 Minimeringsalgoritmen

Uppdelning i ekvivalensklasser kan utföras stegvis.

I ett första steg tas 1-ekvivalenta tillstånd fram. Dessa grupperas i mängder, som då blir ekvivalensklasser.

Därefter undersöks tillstånden parvis inom varje mängd för att se om de även är 2-ekvivalenta. Detta görs genom att betrakta kretsens tillståndövergångar för alla kombinationer av insignaler. De tillstånd i en mängd av 1-ekvivalenta tillstånd som inte är 2-ekvivalenta bryts ut och nya mängder bildas.

I nästa steg undersöks, på samma sätt, vilka av de tillstånd som är 2-ekvivalenta som även är 3-ekvivalenta.

Proceduren upprepas tills de mängder som erhålls efter en undersökning sammanfaller med de mängder som erhöles i föregående steg.

2.2 Exempel

Två exempel illustrerar tillståndsmminimering.

Exempel 7. Betrakta åter exemplet att detektera var tredje 1:a. Vid konvertering av Moore-kretsen i figur 2 till en krets enligt Mealy-modellen erhöles tillståndsdiagrammet i figur 3. Tillståndsdiagrammet har 4 tillstånd, men det räcker med 3 tillstånd

Tabell 1: Tillståndsövergångar för en sekvenskrets som detekterar var tredje etta i en insignalsekvens.

| S_n | S_n^+/u | |
|-------|-----------|---------|
| | $x = 0$ | $x = 1$ |
| S_0 | $S_0/0$ | $S_1/0$ |
| S_1 | $S_1/0$ | $S_2/0$ |
| S_2 | $S_2/0$ | $S_3/1$ |
| S_3 | $S_0/0$ | $S_1/0$ |

enligt figur 5. Nu ska vi visa hur metoden för tillståndsminimering av grafen i figur 3 leder till grafen i figur 5.

Tillståndsövergångar för kretsen med grafen enligt figur 3, ges i tabell 1.

En första partitionering, med syfte att erhålla 1-ekvivalenta tillstånd, ger

$$P_1 : \{S_0, S_1, S_3\}, \quad \{S_2\} \quad (1)$$

Partitionen följer av att start i alla tillstånd i den första mängden ger utsignal $u = 0$ oberoende av värdet på x medan start i tillstånd S_2 i den andra mängden ger utsignal $u = 1$ om $x = 1$.

Genom att betrakta, i tabell 1, de tillståndsövergångar som kan göras från tillstånden S_0 och S_1 , ser man att dessa inte är 2-ekvivalenta, eftersom övergångarna för insignalvärdet $x = 1$ leder till tillstånd S_1 respektive S_2 vilka inte är 1-ekvivalenta.

En insignal som gör att utsignalerna skiljer sig åt är sekvensen $x = (x(t), x(t+1)) = 11$. Startas kretsen i S_0 så blir utsignalen $u = 00$ men vid start i S_1 så blir utsignalen $u = 01$ vilket enligt definition 3 betyder att tillstånden ej är 2-ekvivalenta.

Genom att på motsvarande sätt betrakta de tillståndsövergångar som kan göras från tillstånden S_0 och S_3 ser man att dessa är 2-ekvivalenta.

Detta ger en partitionering av 2-ekvivalenta tillstånd enligt

$$P_2 : \{S_0, S_3\}, \quad \{S_1\}, \quad \{S_2\} \quad (2)$$

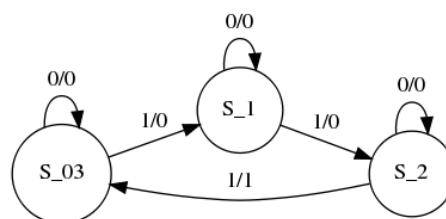
Upprepning av resonemangen, för att undersöka vilka tillstånd som är 3-ekvivalenta, ger partitioneringen

$$P_3 : \{S_0, S_3\}, \quad \{S_1\}, \quad \{S_2\} \quad (3)$$

vilken sammanfaller med partitioneringen P_2 . Detta innebär att minimeringen är klar. Tillstånden

Tabell 2: Tillståndsövergångar för en minimerad sekvenskrets som detekterar var tredje etta i en insignalsekvens.

| S_n | S_n^+/u | |
|----------|------------|------------|
| | $x = 0$ | $x = 1$ |
| S_{03} | $S_{03}/0$ | $S_1/0$ |
| S_1 | $S_1/0$ | $S_2/0$ |
| S_2 | $S_2/0$ | $S_{03}/1$ |



Figur 12: En minimerad tillståndsgraf för att markera var tredje etta i en insignalsekvens.

S_0 och S_3 är ekvivalenta och kan ersättas av ett nytt tillstånd S_{03} . Detta leder till en tabell för den minimerade kretsen enligt tabell 2.

Tillståndsövergångarna i den minimerade kretsen i tabell 2 ger en tillståndsgraf enligt figur 12 vilket är samma graf som i figur 5 så när som på modernas namn.

Exemplet visar att en konvertering från Moore till Mealy bör göras i två steg. I det första steget konverteras Moore-grafen till en Mealy-graf enligt beskrivningen i avsnitt 1.1. I det andra steget genomförs tillståndsminimering av Mealy-grafen.

Nästa exempel visar metoden för tillståndsminimering för ett större tillståndsdiagram.

Exempel 8. Gray-kodade tal x inkommer synkront med klockan i block om 4 bitar med mest signifikant bit först till en synkron sekvenskrets. Kretsen ska på utgången utan tidsfördröjning generera binärkoden med mest signifikant bit först för de inkommande talen. En funktionstabell visas i tabell 3.

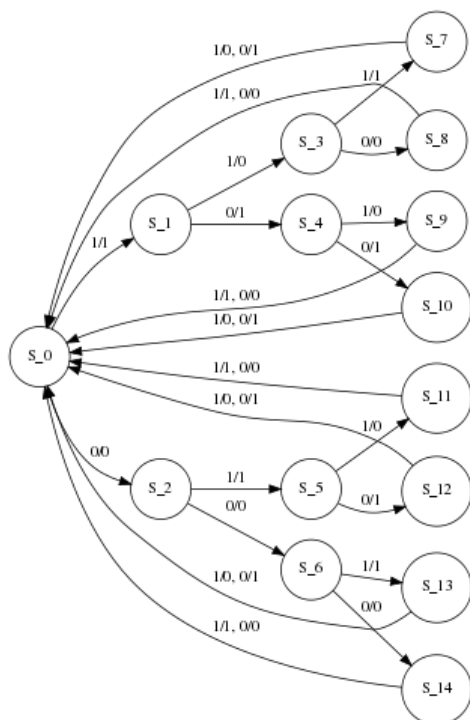
Baserat på funktionstabellen kan en tillståndsgraf för översättning från Gray-kod till binärkod tas fram och den visas i figur 13. Grafen skall tillståndsminimeras härnäst. Utgångspunkten för tillståndsminimeringen är en tabell med tillståndsövergångar som ges i tabell 4.

Tabell 3: Funktionstabell för översättning från Gray-kod till binärkod.

| $x_3x_2x_1x_0$ | $u_3u_2u_1u_0$ |
|----------------|----------------|
| 0000 | 0000 |
| 0001 | 0001 |
| 0011 | 0010 |
| 0010 | 0011 |
| 0110 | 0100 |
| 0111 | 0101 |
| 0101 | 0110 |
| 0100 | 0111 |
| 1100 | 1000 |
| 1101 | 1001 |
| 1111 | 1010 |
| 1110 | 1011 |
| 1010 | 1100 |
| 1011 | 1101 |
| 1001 | 1110 |
| 1000 | 1111 |

Tabell 4: Tillståndsövergångar för ett sekvensnät för översättning från Gray-kod till binärkod.

| S_n | S_n^+/u | |
|----------|------------|------------|
| | $x = 0$ | $x = 1$ |
| S_0 | $S_2/0$ | $S_1/1$ |
| S_1 | $S_4/1$ | $S_3/0$ |
| S_2 | $S_6/0$ | $S_5/1$ |
| S_3 | $S_8/0$ | $S_7/1$ |
| S_4 | $S_{10}/1$ | $S_9/0$ |
| S_5 | $S_{12}/1$ | $S_{11}/0$ |
| S_6 | $S_{14}/0$ | $S_{13}/1$ |
| S_7 | $S_0/1$ | $S_0/0$ |
| S_8 | $S_0/0$ | $S_0/1$ |
| S_9 | $S_0/0$ | $S_0/1$ |
| S_{10} | $S_0/1$ | $S_0/0$ |
| S_{11} | $S_0/0$ | $S_0/1$ |
| S_{12} | $S_0/1$ | $S_0/0$ |
| S_{13} | $S_0/1$ | $S_0/0$ |
| S_{14} | $S_0/0$ | $S_0/1$ |



Figur 13: En tillståndsgraf för att översätta från Gray-kod till binärkod.

En första partitionering ger

$$P_1 : \{S_0, S_2, S_3, S_6, S_8, S_9, S_{11}, S_{14}\}, \quad (4)$$

$$\{S_1, S_4, S_5, S_7, S_{10}, S_{12}, S_{13}\}$$

Undersökning av 2-ekvivalens ger

$$P_2 : \{S_0, S_2, S_3, S_6\}, \{S_8, S_9, S_{11}, S_{14}\}, \quad (5)$$

$$\{S_1, S_4, S_5\}, \{S_7, S_{10}, S_{12}, S_{13}\}$$

Undersökning av 3-ekvivalens ger

$$P_3 : \{S_0, S_2\}, \{S_3, S_6\}, \{S_8, S_9, S_{11}, S_{14}\}, \quad (6)$$

$$\{S_1\}, \{S_4, S_5\}, \{S_7, S_{10}, S_{12}, S_{13}\}$$

Undersökning av 4-ekvivalens ger

$$P_4 : \{S_0\}, \{S_2\}, \{S_3, S_6\}, \{S_8, S_9, S_{11}, S_{14}\}, \quad (7)$$

$$\{S_1\}, \{S_4, S_5\}, \{S_7, S_{10}, S_{12}, S_{13}\}$$

Undersökning av 5-ekvivalens ger partitioneringen

$$P_5 : \{S_0\}, \{S_2\}, \{S_3, S_6\}, \{S_8, S_9, S_{11}, S_{14}\}, \quad (8)$$

$$\{S_1\}, \{S_4, S_5\}, \{S_7, S_{10}, S_{12}, S_{13}\}$$

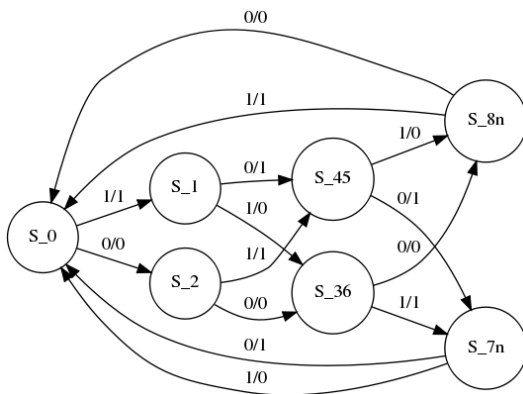
vilken sammanfaller med den som erhöles i föregående steg. Minimeringen är därmed klar. Införande av nya tillstånd i tabell 4 ger ett resultat enligt tabell 5.

Tabell 5 ger en tillståndsgraf enligt figur 14.

3 Tillståndsminimering av ofullständigt specificerade kretsar

Tabell 5: Tillståndsövergångar för en tillståndsminimerad sekvenskrets för översättning från binärkod till Graykod.

| S_n | S_n^+/u | |
|----------|------------|------------|
| | $x = 0$ | $x = 1$ |
| S_0 | $S_2/0$ | $S_1/1$ |
| S_1 | $S_{45}/1$ | $S_{36}/0$ |
| S_2 | $S_{36}/0$ | $S_{45}/1$ |
| S_{36} | $S_{8n}/0$ | $S_{7n}/1$ |
| S_{45} | $S_{7n}/1$ | $S_{8n}/0$ |
| S_{7n} | $S_0/1$ | $S_0/0$ |
| S_{8n} | $S_0/0$ | $S_0/1$ |



Figur 14: En minimerad tillståndsgraf för översättning från Gray-kod till binärkod.

Tillståndsminimering för ofullständigt specificerade tillståndstabeller erbjuder ökade möjligheter till förenklingsmetoder men minimeringsmetoden är också mer komplicerad än motsvarande procedur för fullständigt specificerade tillståndstabeller. Ekvivalenta tillstånd måste i fallet med ofullständigt specificerade nät bytas mot begreppet jämförbara tillstånd.

Definition 4. Två tillstånd S_i och S_j i en sekvenskrets är *jämförbara* (= förenliga) om de utsignaler som nätet ger i alla kommande steg efter start i S_i kan fås att överensstämja med de utsignaler som nätet ger efter start i S_j genom att specificera kretsens ofullständigt specificerade övergångar.

Relationen *jämförbarhet mellan tillstånd* är inte en ekvivalensrelation. Motsvarigheten till ekvivalensklasser kallas för förenlighetsmängder.

Definition 5. En förenlighetsmängd är en mängd av tillstånd där varje par av tillstånd är jämförbara.

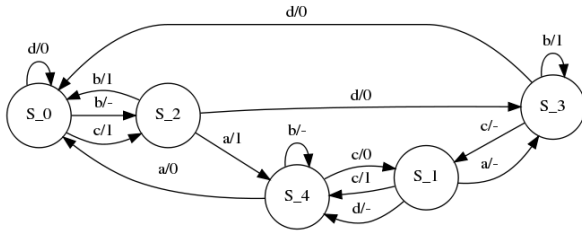
Eftersom jämförbarhet inte är en ekvivalensrelation så är förenlighetsmängderna inte disjunkta.

3.1 Förenklingsalgoritm

En ofullständigt specificerad tillståndstabelle kan förenklas genom att undersöka vilka tillstånd som är jämförbara efter ett steg. Dessa tillstånd kallas 1-jämförbara. Genom att sedan, iterativt, undersöka vilka tillstånd som är jämförbara efter k steg - dessa tillstånd kallas *k-jämförbara* - kan en gruppering av tillstånd erhållas. När ingen ny uppdelning sker, dvs k -jämförbara tillstånd är även $k+1$ -jämförbara, så erhålls de maximala förenlighetsmängderna.

Förenlighetsmängderna som erhålls efter upprepade iterationer kan användas som bas för att välja nya tillstånd till sekvenskretsen på ett sådant sätt att antalet tillstånd minskar jämfört med den ursprungliga sekvenskretsen. Förenklingsalgoritmen illustreras i nästa exempel.

Exempel 9. Sekvenskretsen given i tillståndsdiagrammet i figur 15 ska minimeras med avseende på antal tillstånd. Tillståndsövergångarna i sekvenskretsen ges i tabell 6.



Figur 15: En tillståndsgraf för ett ofullständigt specificerat sekvensnät.

Tabell 6: Tillståndsövergångar för ett ofullständigt specificerat sekvensnät.

| S_n | S_n^+/u | | | |
|-------|-----------|---------|---------|---------|
| | $x = a$ | $x = b$ | $x = c$ | $x = d$ |
| S_0 | -/- | $S_2/-$ | $S_2/1$ | $S_0/0$ |
| S_1 | $S_3/-$ | -/- | $S_4/1$ | $S_4/-$ |
| S_2 | $S_4/1$ | $S_0/1$ | -/- | $S_3/0$ |
| S_3 | -/- | $S_3/1$ | $S_1/-$ | $S_0/0$ |
| S_4 | $S_0/0$ | $S_4/-$ | $S_1/0$ | -/- |

Utgående från tabell 6 kan par av 1-jämförbara tillstånd tas fram enligt

$$\begin{aligned} S_0 \sim S_1, \quad S_0 \sim S_2, \quad S_0 \sim S_3, \quad S_1 \sim S_2, \\ S_1 \sim S_3, \quad S_2 \sim S_3, \quad S_3 \sim S_4 \end{aligned} \quad (9)$$

De 1-jämförbara tillstånden kan illustreras med en graf. I grafen i figur 16 representerar noder tillstånd och bågar de par av tillstånd som är 1-jämförbara. Från figuren ser vi att alla tillstånd i mängden $\{S_0, S_1, S_2, S_3\}$ är parvis 1-jämförbara och tillstånden i $\{S_3, S_4\}$ är parvis 1-jämförbara. Dessa mängder är de maximala mängderna med denna egenskap och en kompakt beskrivning av alla 1-jämförbara tillstånd beskrivs alltså av mängderna

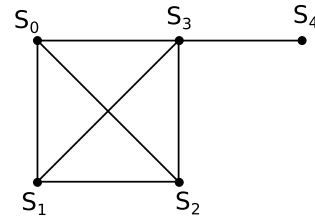
$$J_1 : \{S_0, S_1, S_2, S_3\}, \quad \{S_3, S_4\} \quad (10)$$

Par av 2-jämförbara tillstånd kan nu tas fram enligt

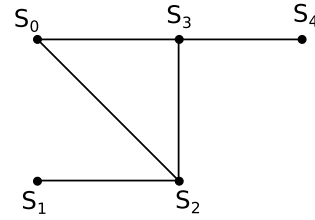
$$S_0 \sim S_2, \quad S_0 \sim S_3, \quad S_1 \sim S_2, \quad S_2 \sim S_3, \quad S_3 \sim S_4 \quad (11)$$

Figur 17 visar motsvarande graf för 2-jämförbara tillstånd och de maximala mängderna med parvis 2-jämförbara tillstånd är

$$J_2 : \{S_0, S_2, S_3\}, \quad \{S_1, S_2\}, \quad \{S_3, S_4\} \quad (12)$$



Figur 16: 1-jämförbara tillstånd är förbundna med bågar i grafen.



Figur 17: 2-jämförbara tillstånd är förbundna med bågar i grafen.

Par av 3-jämförbara tillstånd kan nu tas fram enligt

$$S_0 \sim S_2, \quad S_0 \sim S_3, \quad S_1 \sim S_2, \quad S_2 \sim S_3, \quad S_3 \sim S_4 \quad (13)$$

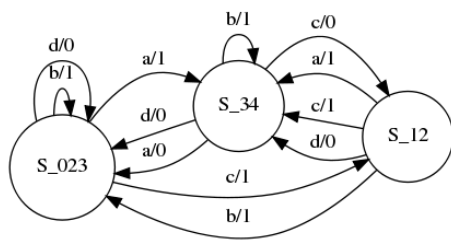
vilket är samma par av tillstånd som är 2-jämförbara enligt (11). Detta ger att mängderna J_2 i (12) är de maximala förenlighetsmängderna och förenklingen kan därmed avslutas.

Införande av nya tillstånd samt bestämning av de storheter som är ofullständigt specificerade ger en tabell med tillståndsövergångar enligt tabell 7.

Den resulterande tillståndsgrafens visas i figur 18.

Tabell 7: Tillståndsövergångar för ett förenklat sekvensnät.

| S_n | S_n^+/u | | | |
|-----------|-------------|-------------|------------|-------------|
| | $x = a$ | $x = b$ | $x = c$ | $x = d$ |
| S_{023} | $S_{34}/1$ | $S_{023}/1$ | $S_{12}/1$ | $S_{023}/0$ |
| S_{12} | $S_{34}/1$ | $S_{023}/1$ | $S_{34}/1$ | $S_{34}/0$ |
| S_{34} | $S_{023}/0$ | $S_{34}/1$ | $S_{12}/0$ | $S_{023}/0$ |



Figur 18: En tillståndsgraf erhållen genom förenkling av ett ofullständigt specificerat sekvensnät.