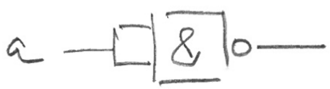
Boolesk algebra med digitaltekniskt fokus

Föreläsning 2
Digitalteknik, TSEA22
Mattias Krysander
Institutionen för systemteknik

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Iakttagelser från föreläsning 1

a)



$y = (a \cdot a)'$

a	$a \cdot a$	$y = (a \cdot a)'$
0	0	1
1	1	0

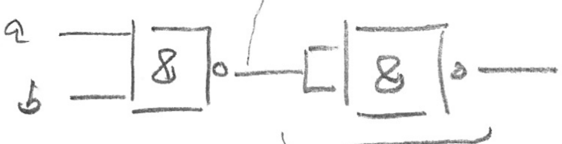
$a \cdot a = a$

$y = a'$

Kretsens funktion är ekvivalent med en inverterare.

b)

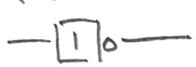
$(a \cdot b)'$



$y = ((a \cdot b)')' = a \cdot b$

dubbel invertering tar ut varandra, Boolesk algebra

$\Leftrightarrow$



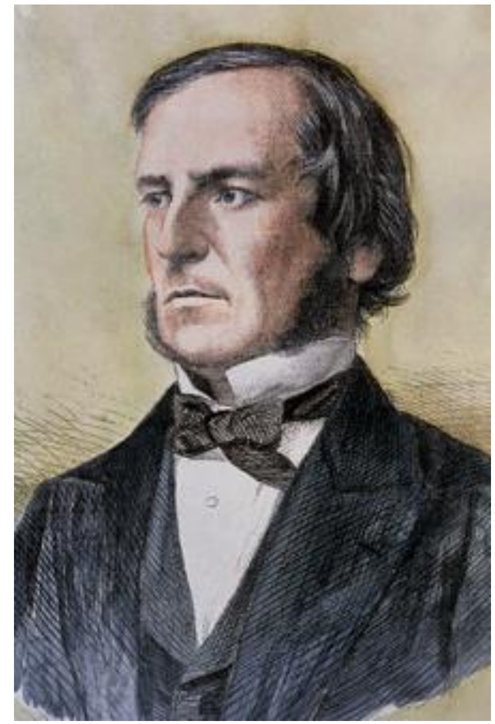
$((a)')' = a$

Boolesk algebra

Matematisk grund för

- Logik
- Används för analys och syntes av digitala kretsar

George Boole var en engelsk matematiker som skapade grunderna till Boolesk algebra



George Boole 1815-1864

Axiom

- Variabelvärden: 0 (falskt), 1 (sann)
- Operationer: eller, och, icke

OR (ELLER)	AND (OCH)	NOT (ICKE)
$0 + 0 = 0 \quad (A1)$	$0 \cdot 0 = 0 \quad (A4)$	$0' = 1 \quad (A7)$
$0 + 1 = 1 \quad (A5)$	$0 \cdot 1 = 0 \quad (A6)$	$1' = 0 \quad (A8)$
$1 + 0 = 1 \quad (A5)$	$1 \cdot 0 = 0 \quad (A6)$	
$1 + 1 = 1 \quad (A3)$	$1 \cdot 1 = 1 \quad (A2)$	

OBS: axiomen definierar sanningstabellerna för motsvarande grindar. Betrakta t ex OR-grinden:

a	b	y	Axiom
0	0	0	(A1)
0	1	1	(A5)
1	0	1	(A5)
1	1	1	(A3)

Räknelagar för en variabel

- Räknelagar kan härledas från axiomen. Dom ska man kunna använda utan att slå upp.
- Anta att *x* är en variabel som kan anta värdet 0 eller 1. Då gäller:

OR (ELLER)	AND (OCH)	NOT (ICKE)
$x + x = x$ (L1)	$x \cdot x = x$ (L2)	$(x')' = x$ (L9)
$x + x' = 1$ (L3)	$x \cdot x' = 0$ (L4)	
$x + 1 = 1$ (L5)	$x \cdot 1 = x$ (L8)	
$x + 0 = x$ (L7)	$x \cdot 0 = 0$ (L6)	

- Gå igenom lagarna och förvissa er om att ni förstår dem.

Räknelagar för flera variabler

Associativa lagar

$x + (y + z) = (x + y) + z$ (L10)

$x(yz) = (xy)z$ (L11)

Kommutativa lagar

$x + y = y + x$ (L12)

$xy = yx$ (L13)

Distributiva lagar

$x(y + z) = xy + xz$ (L14)

$x + yz = (x + y)(x + z)$ (L15)

Absorbtionslagar

$x + xy = x$ (L16)

$x(x + y) = x$ (L17)

Consensuslagar

$xy + x'z = xy + x'z + yz$ (L18)

$(x + y)(x' + z) = (x + y)(x' + z)(y + z)$ (L19)

De Morgans lagar

$(x + y)' = x'y'$ (L20)

$(xy)' = x' + y'$ (L21)

- (L10)-(L14) gäller på samma sätt som för reella tal.
- (L15) anger att även addition är distributivt i Boolesk algebra.
- (L16)-(L21) saknar motsvarighet för reella tal och är värda mer uppmärksamhet.

Axiom och räknelagar för XOR

Axiom

$0 \oplus 0 = 0$ (E1)

$0 \oplus 1 = 1$ (E2)

$1 \oplus 0 = 1$ (E2)

$1 \oplus 1 = 0$ (E3)

Räknelagar för en variabel

$x \oplus 0 = x$ (E4)

$x \oplus x = 0$ (E5)

Räknelagar för flera variabler

$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (E6)

$x \oplus y = y \oplus x$ (E7)

$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$ (E8)

$x \oplus y = x \oplus z \Leftrightarrow y = z$ (E9)

Koppling mellan XOR och operationer i Boolesk algebra

XOR uttryckt i Boolesk algebra

$x \oplus y = x'y + xy'$ (E10)

$(x \oplus y)' = xy + x'y'$ (E11)

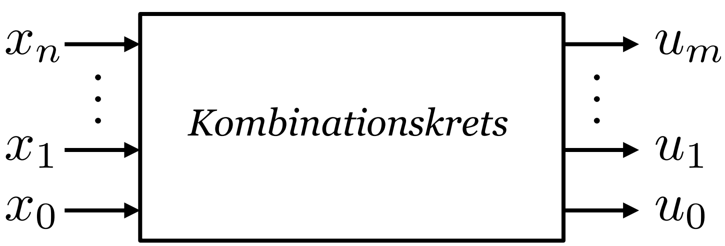
OR och NOT uttryckt i XOR

$x + y = x \oplus y \oplus xy$ (E12)

$x' = x \oplus 1$ (E13)

Kombinationskretsar

En krets där utsignalvärdet vid en godtycklig tidpunkt endast beror av insignalvärdet vid samma tidpunkt.



$$u = f(x)$$

där

$$x = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0)$$

$$u = (u_m, u_{m-1}, \ldots, u_1, u_0)$$

$$u_i, x_j \in \{0, 1\}$$

Syntes av kombinationskretsar

Ex: OR-funktionen

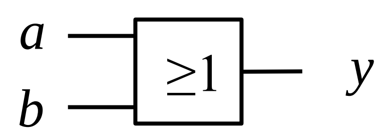
Funktionstabell

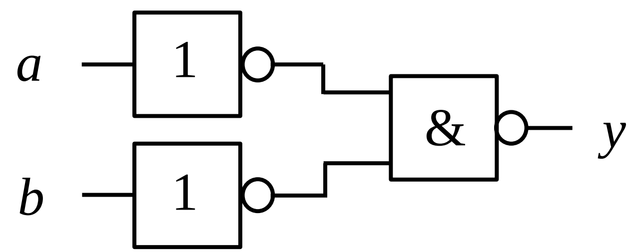
a	b	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Booleska uttryck

$$y = a + b =$$
$$= (a + b)'' =$$
$$= (a'b')'$$

Realisering med grindnät





- Det finns flera olika uttryck som beskriver samma funktion.
- Uttrycken går att översätta till grindnät och vise versa.
- En funktion kan realiseras med grindnät av olika komplexitet och olika grindtyper.

Syntesfrågeställningar

- Hur ställer vi upp Booleska uttryck för en funktion specificerad av en funktionstabell?
- Hur hittar vi ett uttryck som svarar mot ett billigt grindnät?
  - Billig: få ingångar, få grindar, liten kiselarea
  - Bivillkor:
    - får använda en viss typ av grindar
    - får plats på en given programmerbar krets (PLD)
    - maximal fördröjning från insignal till utsignal, begränsar grinddjupet (maximalt antal grindar som en signal får passera)

Digitalteknik

Mattias Krysander

www.liu.se

LINKÖPINGS UNIVERSITET